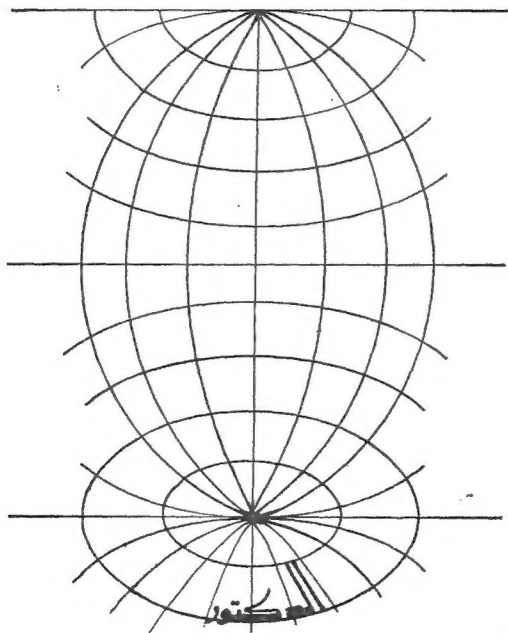


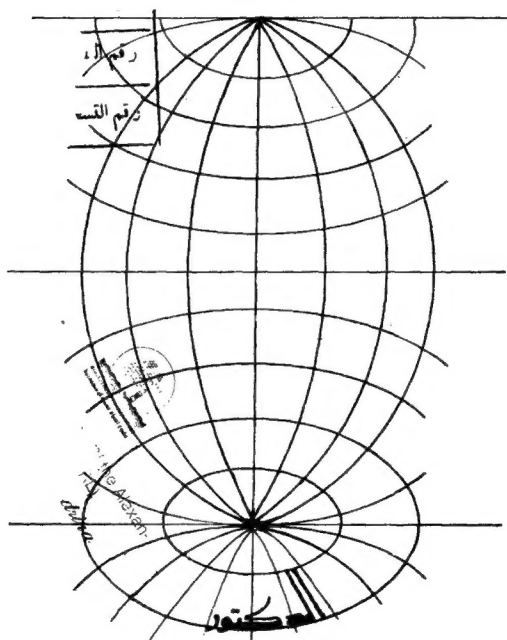
محاضرات في الجبر ديزيا



سامح جزائري



مواضيع في الجغرافيا



سامح جزائري

— مقدمة —

ان المعنى الحرفي للكلمة جيوديزيا هو تقسيم الارض ، وقد تطور هذا المفهوم فأصبح يشمل عددا كبيرا من المواضيع المتعلقة بالارض وشكلها وكثافتها وتغيرات قشرتها وتغيرات القوة الجاذبة ... الخ ، وقد أخذ أهمية علمية كبيرة وخاصة في السنوات الاخيرة حينما استخدمت الاقطار الصناعية لربط مختلف نقاط القارات وتعيين مقدار تفلطح الارض وشكلها .

يمكننا تصنيف المواضيع التي تدخل ضمن نطاق علم الجيوديزيا الى قسمين اساسيين . القسم الاول يعالج المسائل التي تهتم مباشرة المهندس المساح والتي من شأنها ان تعرف القواعد الاساسية التي يركز عليها علم المساحة ، ونذكر من هذه المواضيع تأسيس وحساب الشبكات الجيوديزية وشبكات التسوية العامة للبلاد التي تشكل الهيكل الاساسي لاعمال المسح المستوي والارتفاعي ، وكذلك طرق الارتسام لوضع الخرائط المساحية ، وبحث القسم الثاني في مواضيع علمية تتعلق بالارض كتعيين انحرافات الشاقول وتوزيع الكثافة داخل الارض وطبسي سطحها وتغيرات القشرة الارضية وتغيرات المستوى الوسطي للبحار ... الخ .

يتعرض المهندس في كلا القسمين الى قياسات يقوم بتعديلهما وتقدير استنادا اليها مجاهيل لا يمكن قياسها ، ويتم ذلك وفق مبدأ دقيق معروف في علم الاحصاء والاحتمالات هو مبدأ المربعات الصغرى المشتق من مبدأ تقدير المجاهيل استنادا الى طريقة الاكثر تشابها أو طريقة التشابه الاعظمي (*maximum likelihood*) .

يقسم هذا الكتاب الى قسمين اساسيين :

١ - القسم الاول وشرح فيه بشكل مبسط مواضيع من الجيوديزيا لابد للمهندس المدني الاطلاع بها ، فيعد مدخل في الفصل الاول يعطي في الفصل الثاني مبادئ المثلثات الكروية واهم قوانينها ، ثم يشرح في الفصل الثالث بعض طرق الارتسام لوضع الخرائط المساحية ، ويعد هذا يستعرض في الفصل الرابع والخامس ويشكل

موجز جدا الشبكات الجيوديزية وشبكات التسوية الهندسية
الدقيقة .

٢ — القسم الثاني ، ونشرح فيه مبدأ المربعات الصغرى بطريقة
حديثة وشخصية بالاعتماد على المصفوفات وفي اطار علمسي
منسجم مع علم الاحصاء والاحتالات ، فلم نطلق في الفصل
السادس كلمة تعديل القياسات كما هو معروف في الطرق
الكلاسيكية في المساحة التي تعالج القياسات ، بل استخدمنا
كلمة تقدير المجاهيل ، اذ لم نهتم بايجاد التصحيحات ومن
ثم القيم النهائية بل فوراً بينا طريقة لايجاد القيم المعدلة .

هذا وقد عرضنا المبدأ باستخدام نموذج رياضي عام استلجنا
منه كافة الحالات الخاصة ، وقد بينا في الفصل السابع تطبيقات لهذا
المبدأ في مبادئ الجيوديزيا والمساحة .

لقد اردت بهذا الكتاب ان اعرض بشكل مختصر وعلمي طائفة
المهندسين العددي من مواضيع الجيوديزيا وان اشرح مبدأ المربعات
الصغرى في اطار حديث وضمن قالب يصلح للبرمجة الالكترونية بسهولة
وخاصة اذا اعتمدنا على برامج جزئية جاهزة لضرب مصفوفات ، وقلب
مصفوفة مربعة نظامية وضرب مصفوفة بشعاع .

آمل ان اكون قد حققت طاهدفت المهمة .

حلب في ٢٦ شباط ١٩٨٠

المؤلف

الفصل الاول

شـكـل الارض

(1. 1) - علم الجيوديزيا وقياساته :

ان الجيوديزيا علم غايته دراسة شكل الارض من الوجهة الهندسية ، وهو يبحث في عدد من المواضيع نذكر منها :

- ١ - تعيين شكل وأبعاد الارض .
- ٢ - وضع وحساب شبكات التنظيم التي تشكل الهيكل الاساسي للاعمال الساحية المستوية .
- ٣ - طرق الارتسام على مستوى لجزء من الارض أو للارض بأكملها وذلك بغية انشاء الخرائط .
- ٤ - تأسيس وحساب شبكات التسمية العامة لتكون الهيكل الاساسي للارتفاعات في الاعمال الساحية .
- ٥ - قياس المسافات بالطرق الالكترونية .
- ٦ - تغيرات القشرة الارضية والمستوى الوسطي للبحار .
- ٧ - تغيرات القوة الجاذبة (الثقالة) .
- ٨ - شدة القوى المغناطيسية على سطح الارض .
- ٩ - الاستفادة من الاقمار الصناعية في دراسة شكل الارض .
- ١٠ - تعيين تغيرات السدود .

تعتمد هذه المواضيع على قياسات تجرى على سطح الارض ، ويمكننا تصنيف هذه القياسات كما يلي :

- ١ - قياسات فلكية ، وبواسطتها يتم تعيين الاحداثيات الفلكية

في نقطة من سطح الأرض، وتعيين السمات الجغرافية

الاتجاه . ١

٢ — قياسات للمسافات على سطح الأرض وذلك في عمليات قياس

القواعد وقياس المسافات في شبكة تثليث .

٣ — قياسات دقيقة للزوايا وذلك في عمليات التثليث .

٤ — قياسات التسوية الدقيقة والتي بواسطتها يمكن تعيين

ارتفاعات دقيقة لنقاط من سطح الأرض .

٥ — قياسات للضغط .

ان كل هذه القياسات تجري على سطح الأرض وتعتمد على

الشافول (اتجاه النقطة) ، فلكي تستطيع الاستفادة منها لاجراء

الحسابات وحل الاشكال الهندسية ، علينا معرفة السطح الذي

تتم عليه القياسات ، أو السطح الذي تسقط عليه هذه القياسات

ان هذا السطح يعرف شكل الأرض .

هذا ومن المواضيع والقياسات المذكورة اعلاه ماله علاقة وثيقة

بالمساحة وطبها ماهو علمي بحث ، وسنقتصر في هذه الابحاث

المختصرة على المواضيع التي تهتم المهندس المدني والتي لا بد منها

لايجاز الاعمال المساحية بشكل حقن .

(١.٢) — مختلف الفرضيات لشكل الأرض :

عهد فيثاغورس حتى القرن السابع عشر بعد الميلاد كان

يعتبر ان للأرض شكلا كرويا ، الا ان تقدم الميكانيك العقلي في

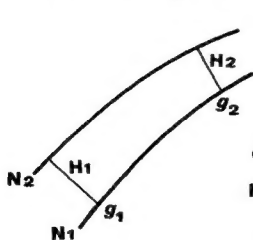
بداية القرن السابع عشر ادى الى ادخال فرضية ادق لشكل

الارض بأن لها شكل الاهليج الدوراني المفلطح باتجاه القطبين .
وقد اعطى نيوتون المبدأين التاليين :

- ١ - ان الشكل المتوازن لكثافة مائعة متجانسة خاضعة لقوانين
الجذب الكوني وتدور حول محور هو مجسم القطع الناقص
الدوراني (الاهليج الدوراني) المفلطح باتجاه القطبين .
- ٢ - ان الطاقة الارضية والتي هي محصلة القوة الجاذبة التي تمر
من مركز الارض والقوة النابذة المولدة من دوران الارض حول
محورها ، تتردد اعتباراً من خط الاستواء نحو القطبين .

وقد أيد كليرو (Clairaut) فرضية الاهليج الدوراني
اذ طرح فكرة سطح السوية . فسمي سطح سوية السطح العمودي
في كل نقطة من نقاطه على اتجاه الشاقول أى اتجاه الطاقة .

نلاحظ من هذا التعريف انه لدينا عدد لا نهائي من
سطوح السوية وهي متساوية الكمية . وهذا يعني عليها انه لرفع
واحدة الثقل من سطح سوية N_1 الى سطح السوية N_2



(شكل 1.2.1) فان العمل ثابت
في كل نقطة من السطح N_1 ولكن ،
حسب المبدأ الثاني لنيوتن تتردد
الطاقة من خط الاستواء نحو القطبين
ومن هنا نستنتج ان سطح السوية N_1
سيقترب من سطح السوية N_2 حين
الاتجاه نحو القطبين وذلك لكسي
يبقى العمل ثابتاً .

(شكل 1.2.1)

أى إذا رمزنا بـ g_1, g_2, \dots, g_i للثقالة في مختلف نقاط السطح N_1, N_2, \dots, N_i والمسافات فسي هذه النقاط بين سطحي السوية N_1 و N_2 فإلنا نستطيع ان نكتب :

$$g_1 H_1 = g_2 H_2 = \dots = g_i H_i$$

الا ان القياسات التي تمت لتعيين شبكات التمثيلت سرعان ما بينت ان فرضية الاهليج الدوراني كشكل للارض ليست الا تقريبية .

ان مبدأ نيوتون المذكور اعلاه لا يتحقق الا اذا كانت الكتل داخل الارض متجاسة تماما وهذا مغاير لحقيقة الارض حيث ان توزع الكتل فيها غير منتظم ، وهذا ما يفسر وجود الانحرافات فسي نقاط من سطح الارض أى عدم تطابق بين اتجاه الشاقول واتجاه الناظم على الاهليج في هذه النقاط .

نستنتج من هنا ان القياسات التي تجرى على سطح الارض والمستندة على اتجاه الشاقول اما تمثل على سطح تعريفه تابع لاتجاه الثقالة أى تمثل على سطح سوية . وقد اتفق على اعتبار سطح السوية البار بالمستوى الوسطي للبحار (دون اعتبار ظاهرة المد والجزر) كسطح يمثل شكل الارض ، وسي سطح السوية هذا بالجيوييد (*géoiide*) .

ان الجيوييد لا يطابق السطح الحقيقي للارض ، والكتل الكبيرة على سطح الارض ليس لها أى تأثير الا على شكل الجيوييد لانها تشكل كتلا جاذبة للشاقول (شكل 1.2.2) .



(شكل 1.2.2)

(1.3) - سطح العقارة :

تتم القياسات على سطح الأرض استنادا الى اتجاه الشاقول، ولهذا الاتجاه مدلول فيزيائي فهو اتجاه الثقالة في كل نقطة ، فلو كان الجيويثد قابلا لتعريف رياضي لاستطعنا استغلال القياسات التي تتم على سطح الأرض لحساب مسافات وزوايا على سطح الجيويثد وبالتالي تكنا من تعريف اوضاع نقاط من سطح الأرض . لكن الجيويثد سطح فيزيائي استندنا في تعريفه على اتجاه الثقالة في كل نقطة من سطح الأرض ، فهو غير معروف رياضيا أى لا يمكن وضع معادلة له كالسطوح الرياضية (مجسم القطع الناقص ، الكرة ، ١٠٠) فلاستفادة من القياسات ولاجراء الحسابات بموض الجيويثد بسطح رياضي ، هو الاهليج الدوراني الذي يعتبر اول تقريب للجيويثد ، وهو سطح يقترب جدا من الجيويثد والفرق بين السطحين لا يتعدى حـد ا اعظما قدره عشرات الامتار . ان هذا التعويض لا تأثير له على المسافات المقاسة على سطح الأرض ، ولكنه يولد صعوبة في استغلال القياسات الزاوية (الزوايا الافقية) فهي تقاس على الطبيعة فسي

مستوى افقي أى عمودى على الشاقول لافى مستوى عمودى على الناظم للاهليج ، هذا ونسمي الزاوية بين الشاقول والناظم بزاوية انحراف الشاقول وقيمة هذه الزاوية تتعلق بالكتل الموجودة على سطح الارض .

حينما نعوض الجيوتيد بالاهليج الدوراني نقول عنه انه سطح للمقارنة ونعتبره التقريب الاول للجيوتيد ، وقد عين عدد كبير من الجيوديزيين ابعاد الاهليج بقياسات فلكية وقياسات زاوية وطولية على سطح الارض ، لا ندخل في تفاصيلها هنا ، ونكتفي بأن نعطي القيم التقريبية لانصاف محاور القطع الناقص المولد :

$$a = 6378388''$$

$$b = 6356909''$$

كما يمكن تعريفه بأحد انصاف محاوره وبالتفريط :

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}$$

ولأخذ فكرة عن الفرق بين a و b ومقدار تفلطح الاهليج نقول اننا اذا مطلقا السطح بمقياس $\frac{1}{6400000}$ فاننا نحصل على فرق بين a و b قدره $3''^4$

يتبين لنا ان تفلطح الاهليج صغير ، فيمكننا في عدد كبير من الحالات ان نعوض الاهليج الدوراني بكرة نعتبرها سطحاً للمقارنة . فالكرة كسطح للمقارنة هي تقريب ثان للجيوتيد . ان نصف القطر التقريبي للكرة هو 6400 km. فاذا مطلقا هذا السطح بمقياس $\frac{1}{6400000}$ فان نصف قطر الكرة يكون بهذا

القياس يساوى مترا واحدا بينما لا يتعدى اعلى الجبال على سطح
الارض ارتفاع 6 1^٣٠٠

واخيرا فاذا كانت المنطقة من سطح الارض صغيرة فيمكننا
تمهيز الكرة في هذه المنطقة بمستوى افقي كما هو الحال في
الاعمال الساحية • فالمستوى الافقي هو التقريب الثالث
للجيوتيد •

ان اعتمادنا لاي سطح من سطوح المقارنة في منطقة يعود
الى قبول فرضية توازي الشاقول والناظم على السطح في كل نقطة
من المنطقة ، فحين اعتبار الكرة سطحا للمقارنة فاننا نقبل هنا
ان الشاقول تمر من مركز الكرة ، وحين اعتمادنا المستوى فهذا
يعود الى قبول فرضية توازي الشاقول • هذا وان قبولنا كسطح
للمقارنة ، الاهليج أو الكرة أو المستوى يعود بشكل عام الى
اعتبارين :

- ١ — مدى اتساع المنطقة التي تجرى فيها القياسات •
- ٢ — مدى الدقة في القياسات ، فمن الطبيعي انه يجب أن
يكون الخطأ الناتج عن اعتماد تقريب دون الاخر اقل من
الاطاء التي تتم في القياسات ، فمثلا لا يعطى لاعتماد
الاهليج الدوراني كسطح للمقارنة عندما يكون الفرق الناتج
في الحسابات بينه وبين الكرة اقل من اخطاء القياسات •

ومما لا شك فيه اننا سننتفع بعيزة سهولة القوانين
والاستنتاجات حينما نستطيع تمهيز الاهليج بالكرة أو الكرة
بالمستوى •

(١.٤) — الاحداثيات الجغرافية والاحداثيات الفلكية :

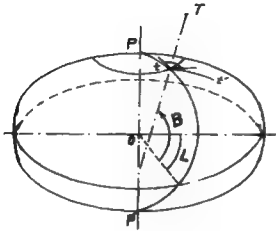
لنعتبر الاهليج الدوراني ، ان المحور الصغير للاهليج

يقطع السطح في نقطتين P و P'

تسمى النقطة P بالقطب الشمالي

للاهليج وتسمى النقطة P' بالقطب

الجنوبي للاهليج .



نطلق اسم مستوى الزوال على

كل مستوي يمر بخط القطبين P P'

(شكل ١.٤.١) ، وهو يقطع

السطح حسب قطع ناقص نسميه

بخط الطول أو خط الزوال .

(شكل ١.٤.١) ان كل مستوى عمودي على

خط القطبين يقطع الاهليج الدوراني

حسب دائرة صغيرة نسميها بالموازي ، وهي تسمى بخط الاستواء

عندما يمر المستوى في مركز الاهليج .

لنعتبر الان نقطة T من سطح الارض . ان مستوى زوال

النقطة T هو المستوى المار بخط القطبين P P' وبالنقطة T

وهو يقطع الاهليج حسب خط الزوال Pt P' . ان الناظم

على السطح الخارج من T هو ناظم على خط الزوال Pt P'

وهو يقطع السطح في النقطة t سقط النقطة T .

نعرف اتجاه الشمال الجغرافي في النقطة t باتجاه .

الشعاع العاشر في النقطة t لخط الزوال والمتجه من t الى P .

يمكننا ان نعرف وضع أى نقطة t على الاهليلج بالاحداثيات الجغرافية للنقطة T ويرمز لها (حين اعتبار الاهليلج كسطح للمقارنة) بـ B و L . حيث :

B : زاوية العرض للنقطة T وهي الزاوية التي يمتصها الناظم الخارج من T مع مستوى خط الاستواء وتقاس من 0° الى 90° اعتبارا من مستوى خط الاستواء نحو القطب الشمالي .

ومن 0° الى 90° اعتبارا من مستوى خط الاستواء نحو القطب الجنوبي .

L : زاوية الطول للنقطة T وهي الزاوية الثابتة بين مستوى زوال النقطة t ومستوى زوال ثان معتبر كهدأ للقياس .
تعتبر L موجبة نحو الشرق .

لنعتبر المنحنى $t't'$ المرسوم على الاهليلج (شكل 1.4.1)
نسمي الزاوية التي يمتصها هذا المنحنى مع خط الزوال الخارج من t بالسحت الجغرافي لـ $t't'$ ، وهي الزاوية بين المماسين للمنحنيين ، وتقاس اعتبارا من الشمال الجغرافي وبالاتجاه
شمال - شرق - جنوب - غرب .

نلاحظ من التعاريف السابقة ان خط زوال ما على الاهليلج هو محل هندسي لنقاط لها نفس زاوية الطول ، فكل النقاط الواقعة على خط زوال تحقق العلاقة (ثابت = L) . وكذلك نلاحظ ان أى مواز على الاهليلج هو محل هندسي لنقاط لها نفس زاوية العرض فكل النقاط الواقعة على مواز تتمتع بالخاصة (ثابت = B) .

لنعرف الآن الاحداثيات الفلكية والتي تناس بطرق الفلك .
 نسمي زاوية العرض الفلكية للنقطة T الزاوية B_0 التسيي
 يمنحها الشاقول الخارج بالنقطة T مع مستوى عمودى على خط
 قطبي الارض (شكل 1.4.2) .

لتعريف زاوية الطول الفلكية نعريف اولاً مستوى زوال النقطة
 T بأنه المستوى الخارج بشاقول النقطة T ويخط مواز لخط قطبي
 الارض ، على هذا الاساس تكون زاوية الطول الفلكية L_0 للنقطة
 T هي الزاوية الثنائية بين مستوى زوال النقطة T ومستوى زوال
 مبدئي للنقطة O (شكل 1.4.3) .

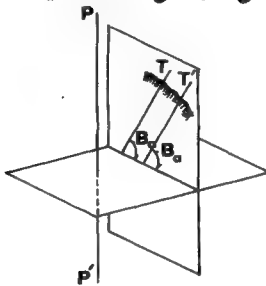
نلاحظ من تعريفنا للاحداثيات الفلكية انها مستقلة عن
 الفرضيات لشكل الارض ، فلها قيمة مطلقة ،

لنعتبر الآن نقطتين T و T' من سطح الارض قريبتين
 من بعضهما وواقعتين في نفس مستوى الزوال . فبسبب وجود
 انحرافات للشاقول ، قد يكون شاقول النقطة T موازياً لشاقول
 النقطة T' وعندها تكون زاويتا العرض للنقطتين متساويتين —
 (شكل 1.4.2) . وهذا يعني انه ليس من الضروري بالسبب
 لنقطتين لهما نفس زاوية العرض ان تكونا واقعتين في نفس المستوى
 العمودى على خط القطبين .

وكذلك لنعتبر نقطتين T و T' قريبتين من بعضهما
 وواقعتين في نفس المستوى العمودى على خط القطبين فيوجد
 انحرافات في الشاقول قد يكون الشاقول الخارج من T موازياً
 للشاقول الخارج من T' وعندها يكون للنقطتين T ، T' نفس

زاوية الطول علما بانها غير موجودتين في نفس مستوى الزوال (شكل
• (1. 4. 3

من هنا يتبين لنا انه يمكن لنقطتين قريبتين من بعضهما
ان تكون لهما نفس الاحداثيات الفلكية ، ونستنتج اذن انه من
المستحيل تعريف نقاط سطح الارض بالاعتماد على الاحداثيات
الفلكية ، وبشكل خاص فلا يمكن لشبكة من النقاط معينة
باحداثياتها



(شكل 1. 4. 2)

الفلكية ان تفي
بأغراض المساحة
اذ قد تتعدى
الاحرافات الشاقول
مجال الاخطاء •

ومن هنا

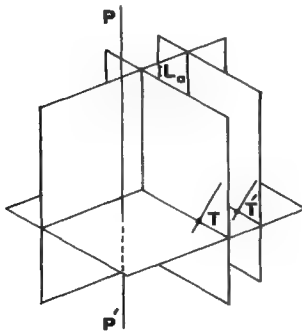
نستنتج انه علينا

ان نعرف اوضاع

نقاط سطح الارض

باعتبار سطوح المقارنة

الرياضية •



(شكل 1. 4. 3)

(1.5) - الخطوط المميزة على الاهليج الدوراني :

أ - الخط الجيوديزي •

يعرف الخط الجيوديزي على سطح ما بالمعني ذي المستوى المماسق للناظم على السطح في كل نقطة من نقاط المعني ، ففي كل نقطة من نقاط الخط الجيوديزي يكون الناظم على السطح متطابق مع الناظم على المعني ، وباعتبار هذا ، الخاصة بمرهن ان الخط الجيوديزي هو أقصر مسافة بين نقطتين واقعيتين على السطح •

ان الخطوط الجيوديزية على الاهليج هي بشكل عام منحنيات يسارية ، ولاحظ ان خطوط الزوال هي خطوط جيوديزية مستوية •

بأعمال انحرافات الشاقول ، تمثل المسافات الاقية المقاسة

على سطح الارض بخطوط جيوديزية على الاهليج •

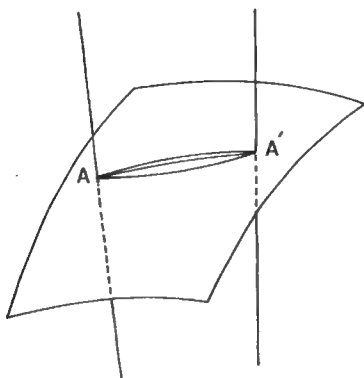
ب - المقطع الناظم والمقطع الناظم العكسي •

لنعتبر النقطتين A و A' على الاهليج الدوراني ان الناظمين في A و A' لا يتقاطعان الا اذا كانتا النقطتان على نفس خط الزوال أو نفس الموازي ، فهذا بشكل عام غير واقعين في مستوى واحد •

نسمي تقاطع السطح مع المستوى الخارج من الناظم في A والنقطة A' بالمقطع الناظم في A (شكل 1.5.1)

ونسمي المقطع الناظم العكسي في A تقاطع السطح مع المستوى الخارج من الناظم في A' والنقطة A •

يبرهن أن الخط الجيوديزي المار من A و A' يمر
 ما بين هذين القطعين •



(شكل 1.5.1)

ان الزاوية بين مقطعين ناظمتين مشتركتين في ناظم واحد
 هي الزاوية بين المماسين للمقطعين • ونلاحظ • باهمـال
 انحرافات الشاقول • بأن للزاوية الثنائية (الاقمية) المقاسة على
 سطح الارض تمثل كزاوية بين مقطعين ناظمين على الا هليج •

نسمي الزاوية بين مقطع ناظمي وخط جيوديزي ماريسـن
 بنقطتين بزاوية الاختزال الى الخط الجيوديزي •

(1.6) — النسألان الاساسيان في الجيوديزيا :

لنعتبر على الا هليج الدوراني النقطتين $A (B , L)$
 و $A' (B' , L')$ • لنصل بينهما بخط جيوديزي ولنرمز به بـ

للمسافة الجيوديزية بين النقطتين α و β للسمت الجغرافي
في النقطة A للخط الجيوديزي $\alpha\beta$ للسمت الجغرافي
في النقطة A' لهذا الخط .

تتضمن المسألتان الاساسيتان في الجيوديزيا كما يلي :

المسألة الاولى :

إذا عُلما الاحداثيات الجغرافية (B, L) للنقطة A
وطول الخط الجيوديزي α والسمت α في A ، فالمطلوب
حساب الاحداثيات الجغرافية (B', L') للنقطة A' والسمت
 α' في A' .

بلاخطاه استنادا لهذه المسألة نستطيع اعتبارا من نقطة
معلومة $A (B, L)$ ان نحسب الاحداثيات الجغرافية
 $A' (B', L')$ لنقطة A' فيها اذا اعطينا سمت من A الى A'
للخط الجيوديزي المار بينهما ، واذا عُلما طول الخط الجيوديزي
من A الى A' .

المسألة الثانية :

إذا عُلما الاحداثيات الجغرافية (B, L) و (B', L')
لنقطتين A و A' فالمطلوب حساب α و α' و $\alpha\alpha'$
ان هذه المسألة تسمح لنا بحساب المسافات على الاهليج
وبالتالي على سطح الارض ، كما تعين لنا السموت الجغرافية
للاتجاهات على سطح الارض .
ولذلك انه لم يكن بالامكان حل هاتين المسألتين على

الاهليج بسهولة مهما كان طول الخطوط الجيوديزية ، الا بعد
تطور الآلات الحاسبة الالكترونية •

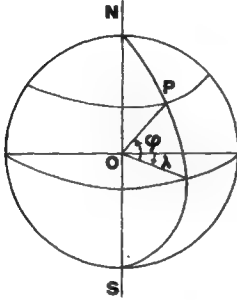
(1.7) — الكرة كسطح للمقارنة :

يمكننا ان نعوض بشكل عام الاهليج بالكرة اذا كانت سعة
المطقة المعتبرة على سطح الارض صغيرة ، فنعتبر التقريب الثاني
للجيويثيد • والكرة سطح رياضي اسهل من الاهليج ، فالنواظم
(الشواقييل) تمر كلها من مركز الكرة ، وينطبق الخط الجيوديزي
والمقطع الناظمي والمقطع الناظمي العكسي على قوس دائرة
عظمى على الكرة ، ان الزوايا الافقية المقاسة على الطبقة عشـل
كنزوايا بين اقواس دوائر عظمى على الكرة ، كما ان المسافات
المقاسة على سطح الارض تسقط كأقواس دوائر عظمى ، نلاحظ هنا
ايضا ان كل الخطوط الجيوديزية على الكرة هي مستوية ، وبذلك
تسهل دراسة عدد من المواضيع في الجيوديزيا ، وكما سنرى في
الفصل الثاني فاننا نستطيع حل المثلثات الكروية بتطبيق علاقات
المثلثات الكروية ، وسهل ايضا حل المسألة الاولى والثانية
المذكورة في الفقرة السابقة •

حين نعوض الاهليج الدوراني في منطقة بكرة نعتبر ككرة
ملاصقة للاهليج نسميها بالكرة ذات الانحناء المتوسط وحسب
نصف قطرها بدلالة زاوية العرض لنقطة وسطية • هذا وفي عدد
من الاحيان نعتبر نصف قطر الكرة $R = 6370 \text{ km.}$
وتكون هذه القيمة كافية لاجل عدد من المسائل •

ان خط قطبي الارض يقطع الكرة حسب نقطتين N و S

(شكل 1.7.1) ، نسمي N بالقطب الشمالي و S بالقطب الجنوبي ، وكما في الاهليج ، لكل مستوي يمر به NS يسمى مستوى الزوال وتقاطعهم مع الكرة هو دائرة عظمى فيها NS قطر .



ان تقاطع الكرة مع مستوي عمودي على NS هو دائرة تسميها بالموازي ، وهي تصبح دائرة عظمى اذا مر المستوى في مركز الكرة وتسمى عندئذ بخط الاستواء .

نعرف النقاط على الكرة

باحداثياتها الجغرافية ، فالنقطة

P تعرف بزاوية العرض φ (شكل 1.7.1)

وزاوية الطول λ ، ان زاوية

العرض φ هي الزاوية التي يضمنها نصف القطر OP (وهو الناظم

على السطح) مع مستوى خط الاستواء وتُقاس اعتباراً من خط الاستواء

موجبة نحو القطب الشمالي N وسالبة نحو القطب الجنوبي S

أما زاوية الطول λ فهي الزاوية الثابتة بين مستوى زوال

النقطة P ومستوى زوال مبدئي وتعتبر موجبة نحو الشرق وسالبة

نحو الغرب .

نلاحظ ان خطوط الزوال والموازيات على الكرة تشكل جملعة

احداثيات منحنية متعامدة .

لنعتبر الكرة ذات نصف القطر R وعليها نقطة P احداثياتها

(φ, λ) . لرسم الموازي وخط الزوال العار من P ولترمز به r

لنصف قطر هذا الموازي •

لكن P_1 نقطة على نفس الموازي P كما لكن P_2 نقطة

على نفس خط الزوال P • فاحداثيات P_1 هي (φ, λ')

واحداثيات P_2 (φ', λ) •

• لحساب طول القوس PP_1 و PP_2

لدينا من الشكل (1.7.2) :

$$PP_1 = r(\lambda - \lambda')$$

ولكن نلاحظ بسهولة انه لدينا :

$$r = R \cos \varphi \quad (1.7.1)$$

فتصبح العلاقة السابقة :

$$PP_1 = R \cos \varphi (\lambda - \lambda') \quad (1.7.2)$$

وكذلك نستخرج من الشكل (1.7.2) :

$$PP_2 = R(\varphi - \varphi') \quad (1.7.3)$$

(شكل 1.7.2)

لنعتبر الان تغييرا جزئيا φ قدره $d\varphi$ فننتقل

النقطة P على خط الزوال انتقالا جزئيا ds_m يمكن حسابه

بتفاضل العلاقة (1.7.3) بالنسبة ل φ أو من الشكل

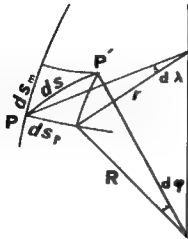
(1.7.3) مباشرة

$$ds_m = R d\varphi$$

(1.7.4)

وكذلك لنعتبر تغييرا جزئيا λ قدره $d\lambda$ فننتقل النقطة P

على الموازي انتقالا جزئيا ds_p يمكن حسابه بتفاضل المتكاملة
(1.7.2) بالنسبة لـ λ أو من الشكل (1.7.3)
مباشرة :



$$ds_p = R \cos \varphi d\lambda \quad (1.7.5)$$

ومن أجل تغيير φ و $d\varphi$ و $d\lambda$ ،
تصبح النقطة P بالوضع P'
وتكون قد انتقلت انتقالا جزئيا
يمكن حسابه $PP' = ds$

(شكل 1.7.3)

من العلاقة التالية :

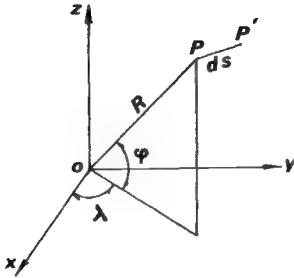
$$ds^2 = ds_m^2 + ds_p^2 \quad (1.7.6)$$

وبادخال (1.7.4) و (1.7.5) في العلاقة (1.7.6)
نجد :

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \quad (1.7.7)$$

• يمكننا ان نبرهن على العلاقة (1.7.7) بطريقة ثانية .
لنعتبر في مركز الكرة جلة الاحداثيات المتعامدة (o x y z)
حيث (o x , o y) في مستوى خط الاستواء و (o x , o z)
في مستوى الزوال المبدئي و o z متجه نحو القطب الشمالي N .
ان المعادلات الوسيطة للكرة في هذه الجلة هي (شكل

(1.7.4



(1 . 7 . 8)

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= R \sin \varphi \end{aligned}$$

(شكل 1 . 7 . 4)

باعتبار تغيرات λ و φ قدرهما $d\lambda$ و $d\varphi$ تنامي z, y, x تغيرات قدرهما dz, dy, dx تعطى من (1 . 7 . 8) بتفاضل هذه العلاقات :

$$\begin{aligned} dx &= R (- \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - \cos \varphi \sin \lambda d\lambda) \\ dy &= R (- \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + \cos \varphi \cos \lambda d\lambda) \\ dz &= R \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (1 . 7 . 9)$$

ونقل النقطة P الى نقطة P' ($ds = PP'$) يعطى هذا الانتقال بالعلاقة

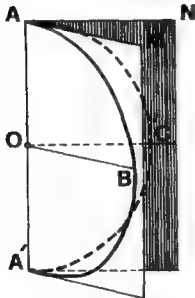
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1 . 7 . 10)$$

بإدخال (1 . 7 . 9) في (1 . 7 . 10) نجد العلاقة (1 . 7 . 7) .

الفصل الثاني المطلقات الكروية

(2.1) — الزاوية الكروية والمطلات الكروية :

لنعتبر الكرة ذات المركز O ونصف القطر R . ان كل مستو يمر من O يقطع الكرة حسب دائرة مركزها O ونصف قطرها R .
لكن A و B نقطتين على سطح الكرة غير متناظرتين بالنسبة للمركز (شكل 2.1.1) . ان المستوى المار من A و B و O يقطع الكرة حسب دائرة عظمى



والنقطتان A و B تقسمان هذه الدائرة الى قوسين الاول اصغر من نصف محيط الدائرة والثاني اكبر من نصف محيطها .
نقول القوس AB من الدائرة العظمى يعني القوس الاصغر من نصف محيط الدائرة ، ويسمى هذا القوس بالمسافة

(شكل 2.1.1)

الكرية او بالمسافة الجيوديزية

بين النقطتين . نلاحظ ان القوس AB له نفس قياس الزاوية المركزية

$$\angle AOB$$

لنعتبر الان النقطة C من سطح الكرة والدائرة العظمى

$$OAC$$

لنرسم من A المماسين AM و AN للدائرتين AB و AC
نعرف الزاوية الكروية ذات الرأس A أى الزاوية $\hat{B} \hat{A} C$
بالزاوية بين المماسين للدائرتين AB و AC . ونرى انها ايضا
الزاوية الثنائية لمستوى الدائرتين .

يمكننا ان نصل ثلاثة نقاط واقعة على الكرة بثلاث دوائر عظمى

على ان لا تكون واقعة مع مركز الكرة في مستو واحد .

ان الشكل الذى نحصل عليه يسمى بالمثلث الكروى (2 . 1 . 2)

لكل مثلث كروى ستة عناصر وهي (ρ) الاضلاع وهي الاقواس
 $a = \widehat{BC}$ $b = \widehat{AC}$ $c = \widehat{AB}$ (ب) الزوايا الكروية في الزوايا
أى \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} .

اذا وصلنا رؤوس المثلث بمركز الكرة O (شكل 2 . 1 . 2)

نحصل على ثلاثة O A B C نسميها بالثلاثية المركزية للمثلث

الكروى . نلاحظ ان الزاوية $\hat{B} \hat{O} C$

لها نفس قياس القوس a ، وكذلك

بالنسبة للزاويتين $\hat{A} \hat{O} B$ و $\hat{A} \hat{O} C$

اللتين لها نفس قياس القوسين

b و c . كما نلاحظ ان

الزاوية الثنائية لوجهين من اوجه الثلاثية

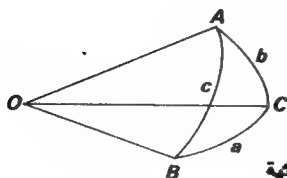
هي زاوية كروية ، ومن هنا نستنتج ان

عناصر المثلث الكروى هي نفس عناصر

الثلاثية المركزية .

اذا قطعنا الثلاثية المركزية بمكرات مركزها O وذات انصاف

اقطار متغيرة حصلنا على مثلثات كروية اضلاعها المتقابلة لها نفس



القياس الزاوي وزواياها الكروية المتقابلة متساوية . فباعتبار قياس زاوي للاضلاع تكون هذه المثلثات كلها متساوية . ومن هنا نستنتج اننا نستطيع ان نعتبر نصف قطر الكرة التي رسم عليها مثلث كروي يساوي للواحد وان نستنتج العلاقات بين عناصر المثلث الكروي .

(2.2) — سطح قطعة الكرة :

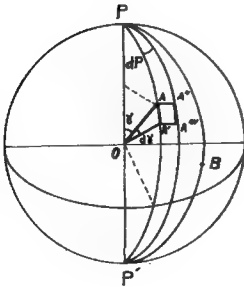
لنعتبر الكرة ذات المركز O ونصف القطر R ولتكن دائرتين اعظميتين محد دتـهن PAP' و PBP' لقطعة كرة ذات زاوية كروية P و A نقطة ما على الدائرة العظمى PAP' . لنرمز γ للزاوية التي يصنعها القطر PP' مع نصف القطر OA .

لنعط تغيرا لـ γ قدره $d\gamma$ فنحصل على النقطة A' وتغيرا للزاوية الكروية P قدره dP فنحصل على الدائرة العظمى

$PA''P'$. ان المستويين العمودين على القطر PP' والباراحدهما في A والثاني في A' يقطعان الدائرة العظمى $PA''P'$ في النقطتين A'' و A''' (شكل 2.2.1)

ان مساحة السطح الجزئي $AA'A''A'''$ تساوي :

$$(2.2.1) \quad dS = AA' \times AA'' \quad (\text{شكل 2.2.1})$$



$$AA' = R d\gamma \quad : \text{ولدينا}$$

$$AA'' = r dP = R \sin \gamma \cdot dP \quad \text{حيث } r \text{ هو نصف قطر}$$

الدائرة الصغرى AA'' فتصبح العلاقة (2.2.1) :

$$dS = R^2 \sin \gamma \, d\gamma \, dP$$

وتكون مساحة قطعة الكرة ذى الزاوية الكروية P :

$$S = R^2 \int_0^P dP \int_0^\pi \sin \gamma \, d\gamma = PR^2 \left[-\cos \gamma \right]_0^\pi$$

وطه

$$\boxed{S = 2PR^2} \quad (2.2.2)$$

نستنتج اذن ان سطح قطعة كرة متناسب طرديا مع قيمة الزاوية الكروية لهذه القطعة .

ملاحظة : اذا اعتبرنا $P = 2\pi$ في العلاقة (2.2.2) نحصل على سطح الكرة :

$$\Sigma = 4\pi R^2 \quad (2.2.3)$$

(2.3) — الزيادة الكروية في العنط الكروي :

ليكن لدينا العنط الكروي ABC ان مساحات القطع الكروية ذات الرؤوس A ، B ، C تساوى على الترتيب : $2AR^2$ ، $2BR^2$ ، $2CR^2$ حيث A ، B ، C هي الزوايا الكروية في رؤوس العنط ABC (شكل 2.3.1)

إذا جمعنا مساحات هذه القطع استنتجنا نصف سطح الكرة مطروحا عنها سطحي المثلثين ABC و $A'B'C'$ لنرى
 + T و T' لسطحي هذين المثلثين فيمكننا ان نكتب

$$2AR^2 + 2BR^2 + 2CR^2 - T - T' = 2\pi R^2$$

لكن عناصر المثلث $A'B'C'$ ما هي الا عناصر المثلث ABC

فالمثلثان متساويان ، أى لدينا

$T = T'$ وتصبح العلاقة

السابقة :

$$2AR^2 + 2BR^2 + 2CR^2 - 2T = 2\pi R^2$$

وطه

$$A + B + C = \pi + \frac{T}{R^2} \quad (2.3.1)$$

أى ان مجموع زوايا المثلث الكروى

أكبر دوما من π ونسمي الكمية

$$\mathcal{E} = \frac{T}{R^2} \quad (2.3.2)$$

بالزيادة الكروية ، وتكون قيمتها بالثنائي المئوية :

$$\mathcal{E}^{cc} = \int \frac{T}{R^2} \quad (2.3.3)$$

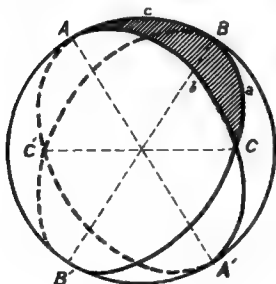
فاذا علمنا سطح المثلث الكروى استطعنا حساب الزيادة الكروية ،

واذا كانت الزيادة \mathcal{E} معلومة فالعلاقة (2.3.2) تعطينا

مساحة المثلث الكروى ، هذا وباعتبار ان \mathcal{E}^{cc} هي صغيرة بشكل

عام (R^2 في المخرج) فاننا اذا اعتبرنا قيمة تقريبية لمساحة

المثلث T فلا تتأثر عليها قيمة \mathcal{E}^{cc} فيمكننا اذن حساب T كما



(شكل 2.3.1)

لو كان المثلث مستويا • ومن ثم تعطينا العلاقة (2.3.3) قيمة الزيادة الكروية •

(2.4) - العلاقات الأساسية في المثلث الكروي :

لكن الكرة ذات المركز O ونصف القطر المساوي للواحد

($R = 1$) وليكن ABC مثلثا كرويا مرسوما عليها •

سنعتبر هنا القياس الزاوي لاضلاع المثلث • لندخل جملة

الاحداثيات المتعامدة ($o \ x \ y \ z$) ، ذات البدأ ، مركز الكرة • وبشكل يكون معه المحور z • مطبقا مع نصف القطر

OA والمحور y • في مستوى الدائرة العظمى AB ومتجهسا

في نفس ربع الكرة الموجودة فيه النقطة C ، أما المحور x •

فموجه بشكل تصبغ فيه الجملة ($o \ x \ y \ z$) جملة مباشرة •

لنطبق على هذه الجملة دورانا حول المحور $o \ x$ سعته

الزاوية c ، فنحصل على الجملة

($o \ x' \ y' \ z'$) حيث z' •

يصبح مطبقا مع نصف القطر

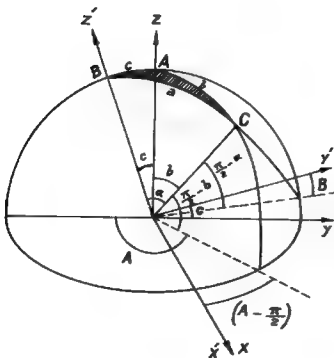
B • يصبح y في الوضع

y' • صانعا زاوية c مع

y • ويبقى في مستوى الدائرة

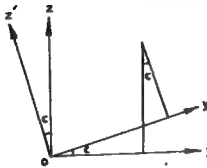
العظمى AB ، أما المحور

x' • فهو مطبق مع المحور $o \ x$ •



(شكل 2.4.1)

ان قوانين التحويل من الجلة (x, y, z) الى الجلة (x', y', z')
 تعطى (شكل 2.4.2) بالعلاقة المتريسية التالية :



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos C & \sin C \\ 0 & -\sin C & \cos C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

(شكل 2.4.2)

لنرمز به (x_c, y_c, z_c) لاحداثيات النقطة c في الجلة القديمة
 وهـ (x'_c, y'_c, z'_c) لاحداثياتها في الجلة الجديدة . فيمكننا
 ان نكتب حسب (2.4.1) :

$$\begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos C & \sin C \\ 0 & -\sin C & \cos C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

ولكن لدينا من الشكل (2.4.1) :

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b \cos(A - \frac{\pi}{2}) \\ \sin b \sin(A - \frac{\pi}{2}) \\ \cos b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b \sin A \\ -\sin b \cos A \\ \cos b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \\ \cos a \end{bmatrix}$$

وطه تصبح (2.4.2) :

$$\begin{bmatrix} \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \\ \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos C & \sin C \\ 0 & -\sin C & \cos C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin b \cos A \\ -\sin b \sin A \\ \cos b \end{bmatrix}$$

ومنه بضرب المصفوفة بالعمود في الطرف الثاني من هذه المعادلة

نجد

$$\begin{bmatrix} \sin a & \sin B \\ \sin a & \cos B \\ \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b & \sin A \\ -\cos c \sin b & \cos A + \sin c \cos b \\ \sin b \sin c \cos A + \cos b \end{bmatrix}$$

أى

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad (2.4.3)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (2.4.4)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (2.4.5)$$

يمكننا كتابة العلاقة (2.4.3) على الشكل :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

ونتطبيق تماثل دائرى للروموس نستنتج

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (2.4.6)$$

نسي هاتين العلاقتين بعلاقتي الجيوب في المثلث الكروى •

أما العلاقة (2.4.4) فتسمى بعلاقة الجيب — جيب وهي تربط

بين خمسة عناصر من المثلث الكروى • وتطبيق تماثل دائرى يمكننا

كتابة علاقات أخرى شبيهة فيها •

أما العلاقة (2.4.5) فيمكننا أن نكتب استعادا اليها وتطبيق

تماثل دائرى للروموس :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (2.4.7)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

تسمى هذه العلاقات بعلاقات التجيب وهي مستقلة بعضها عن الآخر لان كل معادلة منها تحوى زاوية مغايرة ولا يمكن بالتالى استنتاج علاقة من العلاقتين الباقيتين ، فهي تولف مجموعة أساسية تسمى بالعلاقات الأساسية في المثلث الكروى ، فإضافة علاقات المثلث الكروى يمكن استنتاجها اعتبارا من هذه العلاقات (2 . 4 . 7) والاستعانة بعلم المثلثات ، ولا يمكننا ايجاد أكثر من ثلاث علاقات مستقلة تربط عناصر المثلث الكروى ، اذ انفسه بافتراض وجود علاقة رابعة مستقلة نستطيع عندئذ حل المثلث أى ايجاد عناصره فيها اذا علمنا عنصرين منه وهذا مستحيل .

يمكننا ان نستنتج علاقات أخرى للمثلث الكروى باستخدام هذه العلاقات وعلم المثلثات .

نقول عن مثلث كروى $A B C$ انه قائم اذا كانت احدى زواياه قائمة او احداضلامه قائما (مثلا $a = \frac{\pi}{2}$) يمكننا ايجاد علاقات المثلثات الكروية القائمة كحالة خاصة من العلاقات التى وجدناها اعلاه .

تعهد علاقات المثلثات الكروية في عدد من مجالات الجيوديزيا فهي تستخدم في علم الفلك وفي البحرية والطيران وفي حـلـ
مثلثات شبكات التمثيل وفي الارصادات . . .

تطبيق : لدينا نقطتان A و B على الكرة ذات نصف القطر R .

أ — نعطى الاحداثيات الجغرافية للنقطة A ولكن (φ, λ) وطول قوس الدائرة العظمى بين A و B ويمكن : وسيت
القوس $A B$ من A الى B ولكن α . والمطلوب ايجاد

الاحداثيات الجغرافية (φ', λ') للنقطة B والسمت من B الى A (المسألة الاساسية الاولى) باعتبار سطح المقارنة الكرة)

بـ — نعطي الاحداثيات الجغرافية للنقطتين A و B ولكن (φ, λ) و (φ', λ') والمطلوب ايجاد أقصر مسافة بين A و B والسمت من A الى B والسمت العكسي من B الى A . (المسألة الاساسية الثانية باعتبار سطح المقارنة الكرة) •

الفصل الثالث

التمثيل المستوي

(3.1) — تعريف التمثيل المستوي :

لقد ادخلنا في الفصل الاول سطوحا رياضية للمقارنة لتمثيل نقاط سطح الارض، الا ان التمثيل النهائي لعطقة من سطح الارض يجب ان يتم على مستو ، فعلينا نشر هذه السطوح للحصول على هذا التمثيل ، لكننا نعلم ان الاهليج والكرة سطحان غير قابلين للنشر دون تمزق ، أى انه بنتيجة التمثيل المستوي ستعاني الاشكال المرسومة على هذين السطحين تغيرات ، ونحصل بشكل عام بنتيجة التمثيل المستوي للاهليج أو الكرة على تغيرات في الاطوال والزوايا والمساحات .

ان نظريات الارسام تبحث في كيفية نشر الاهليج أو الكرة أو جزء من هذين السطحين ، وهي تعرف طرق التمثيل المستوي وتحدد قوانين التغيرات الخطية والزوايا لكل طريقة .

نعرف كل طريقة للارسام أو للتمثيل المستوي بتوافق نقطي بين نقاط الاهليج أو الكرة ونقاط المستوي .

لقد عرفنا نقاط الاهليج أو الكرة باحداثياتها الجغرافية فاذا اخترنا في مستوي التمثيل احداثيات متعامدة (x , y) نستطيع ان نعرف التوافق النقطي وبالتالي الارسام تحليليا بقوانين نسميها بقوانين التحول :

$$x = f(\varphi, \lambda)$$

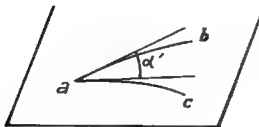
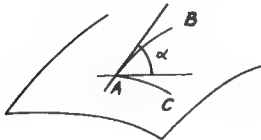
$$y = g(\varphi, \lambda)$$

(3.1.1)

(أوبدالة B و L بالنسبة للاهليلج)

يجب ان تخضع القوانين (3.1.1) لشرط وحيد هو انه لقيمة (φ, λ) يجب ان توافقها قيمة وحيدة (x, y) . ان مجرد اختبار التتابع f و g تتعرف لدينا طريقة للارتسام . ان هذا التعريف هو تحليلي و عام ، يتبين لنا انه لدينا عدد لا نهائي من طرق التمثيل ومن بعض هذه الطرق ما يقبل بالاضافة للتعريف التحليلي السابق (3.1.1) تعريفا هندسيا كالارتسامات العظوية مثلا .

نعرف المترسم لمنحن مرسوم على السطح بالخط المؤلف من النقاط في المستوى كمرسعات لنقاط المنحنى المرسوم على السطح . ان هذا المترسم يكون منحنيا بشكل عام في المستوى .
لقد سبق ان ذكرنا ان الزاوية α بين منحنين AB و AC مرسومين على سطح هي الزاوية بين العاصمين لهذين المنحنين في A . فاذا طبقنا طريقة للارتسام نحصل فسي المستوى على المنحنين ab و ac مرتسمي المنحنين AB و AC (شكل 3.1.1)



(شكل 3.1.1)

ان مرتسم الزاوية α هي الزاوية α' في المستوى بين العاصمين للمنحنين المستقيمين ab و ac .
تفاير بشكل عام الزاوية α مرتسما α' وهنا نتساءل هل يمكن اخضاع التتابع f , g لشرط بشكل تتم

فيه المحافظة على الزوايا في كل نقاط المنطقة المطلوب تمثيلها على المستوى .

يبرهن انه يمكن ايجاد عدد لانهائي من الارتسامات التي تتمتع بهذه الخاصة أى التي تؤمن $(\alpha = \alpha')$ في كل نقاط المنطقة الممتدة .

نسمي هذه الانواع من الارتسامات بالارتسامات المطابقة .
يمكننا اختيار التتابع f و g بشكل تتم فيه المحافظة على المساحات ونسمى عدد ذلك الارتسامات بالمساوية .

يبرهن انه لا يمكن ايجاد طريقة للارتسام يحافظ فيها على الزوايا والمساحات معا .

بما ان الاهليج أو الكرة سطحان لا يمكن تطبيقها على المستوى فلا توجد طرق للارتسام يحافظ فيها على الاطوال ولكننا نستطيع ايجاد طرق يحافظ فيها على الاطوال حسب خطوط معينة على السطح كالموازيات وخطوط الزوال أو خطوط اخرى .

ان اتباع طريقة للارتسام دون اخرى لوضع خريطة لقسم من سطح الارض يتعلق بالفاية المطلوبة من الخريطة وباتساع المنطقة وشكلها واتجاهها العام على الاهليج .

سنقتصر في هذا الفصل على عدد من طرق الارتسام الاكثر استعمالا وخاصة طرق الارتسام المطابق وسنعتبر الكرة كسطح للمقارنة . ان هذا الاعتبار تقريبي وغير كاف اذا كانت المنطقة المراد تمثيلها كبيرة . ان طرق الارتسام تبقى نفسها ولكن قوانين التحول تتعدد مع اعتبار الاهليج الدوراني وهي تخرج عن هذا النطاق .

(3.2) — نظرية تيسو (Tissot) ومبادئ نظريات الارتسام :

تستند نظريات الارتسام على نظرية تيسو التي سنعرضها دون برهان وهي عامة بالنسبة لارتسام سطح على سطح آخر :

- ١ — في كل ارتسام نقطي لسطح على سطح آخر يوجد في كل نقطة اتجاهان متعامدان يرتسمان حسب اتجاهين متعامدين .
- ٢ — في كل ارتسام نقطي لسطح على سطح آخر ترسم دائرة لامتناهية في الصغر مرسومة على السطح الاول كقطع ناقص .
- لا متناه في الصغر على السطح الثاني .

لنعتبر في نقطة P من سطح عنصرًا خطيًا لامتناهيا في الصغر ds ، ولنطبق طريقة ارتسام لهذا السطح على سطح آخر ان العنصر الخطي ds سيرسم حسب ds' . نعرف نسبة التغير الطولي المقدار :

$$m = \frac{ds'}{ds} \quad (3.2.1)$$

فباعتبار الشطر الثاني من نظرية تيسو نرى ان نسبة التغير الطولي في نقطة ما تكون تابعة لاتجاه العنصر ds على السطح ، وتصبح اعظمية واصغرية حسب اتجاهين متعامدين يرتسمان حسب محاور القطع الناقص ، وستخلص من هنا ان نسبة التغير الطولي تتعلق بشكل عام بعاملين :

- ١ — وضعية النقطة P على السطح .
- ٢ — اتجاه العنصر ds

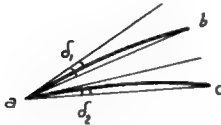
يبرهن في طرق الارتسام المطابق التي يحافظ عليها على الزوايا

ان مرسم القطع الناقص اللامتاهي في الصغر هو دائرة ، فيتحول
هنا القطع الناقص الى دائرة • ومن هنا نستنتج ان نسبة التغير
الطولي في طرق الارسام المطابق لاتتعلق باتجاه العنصر ds
بل تبقى ثابتة وتابعة فقط لوضعية النقطة على السطح ، هاتان
الخاصتان مميزتان للارسام المطابق •

تحافظ بعض طرق الارسام على الاطوال حسب منحنيات ،

فحسب هذه المنحنيات تكون نسبة التغير الطولي $m = 1$

وفي بعض طرق الارسام يشترط ان تكون $m = 1$ في نقطة وسطية
من المنطقة المراد تمثيلها •• ليكن AB و AC منحنيين
مرسومين على السطح في النقطة A • هذان المنحنيان يرتسمان
حسب منحنيين ab و ac (شكل 3.2.1) •



ان الزاوية بين العناصير لهذين

المنحنيين تساوي الزاوية A على

السطح اذا كان الارسام مطابقا •

لنرسم الوترين ab و ac ان الزاويتين

δ_1 و δ_2 بين العناصير والوترين

تساويان بالتصحیحات الزاوية ، وستطبیح (شكل 3.2.1)

بمعرفتها الانتقال من زاوية على السطح الى زاوية في المستوى

بين الاوتار •

ان نظرية تيسو عامة فنتائجها صحيحة بالنسبة لارسام

الاهليج أو الكرة على المستوى •

(3.3) — ارسام الخرافات المسطحة المربعة :

يعرف هذا الارسام بالقوانين التالية :

$$\begin{aligned} x &= R \lambda \\ y &= R \varphi \end{aligned}$$

(3.3.1)

حيث R هو نصف قطر الكرة .

ان معادلة مواز ما على الكرة هي (ثابت φ) وتعطينا (3.3.1) في هذه الحالة (ثابت y) أى ان الموازيات تمثل بمستقيمات موازية للمحور ox ومن اجل ($\varphi = 0$) (خط الاستواء) نحصل على ($y = 0$) أى ان المحور ox يمثل خط الاستواء (شكل 3.3.1)

أما معادلة خط زوال ما على الكرة

فهي (ثابت λ) وتعطينا

(3.3.1) في هذه الحالة

(ثابت x) أى ان خطوط الزوال

تمثل بمستقيمات موازية للمحور oy

ومن اجل $\lambda = 0$ (معادلة خط الزوال

المبدئي) نحصل على ($x = 0$)

أى ان المحور oy يمثل خط الزوال

المبدئي .

ان طول قوس من خط زوال ما

محصور بين خط الاستواء ومواز

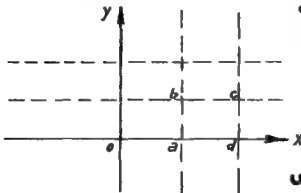
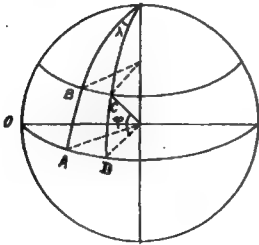
(ثابت φ_0) كالقوس AB يعطى

بالعلاقة :

(شكل 3.1.1)

$$AB \approx R \varphi_0$$

(3.3.2)



يمثل هذا القوس في المستوى حسب مواز للمحور OY اعتباراً من المحور Ox بطول $(y_b = R \varphi_b)$ وذلك حسب العلاقة الثانية من (3.1.1) من هنا نستنتج أنه في طريقة الارتسام هذه ، محافظة على الاطوال حسب خطوط الزوال .

لنعتبر على مواز ba (ثابت $= \varphi_b$) قوساً AC محموراً بين خطي زوال (ثابت $= \lambda_b$) و (ثابت $= \lambda_c$) .
فاستناداً الى (1.7.2) يمكننا ان نكتب :

$$BC = R \cos \varphi_b (\lambda_c - \lambda_b) \quad (3.3.3)$$

لكن b و c النقطتين في مستوى الارتسام السطيين L
و C والواقعتين على مواز للمحور O .
ان الطول bc يعطى بالعلاقة :

$$bc = x_c - x_b = R (\lambda_c - \lambda_b) \quad (3.3.4)$$

وذلك استناداً الى قوانين التحميل (3.3.1)

بمقارنة العلاقتين (3.3.3) و (3.3.4) نجد ان طريقة الارتسام هذه تعطينا تغيرات في الاطوال حسب الموازيات وان الطول bc المثل للطول BC يساوى للطول AD على خط الاستواء مهما كان وضع الموازي (ثابت $= \varphi$) وان هذا التغير يصبح لانها في نقطة القطب .

لنعتبر على الكرة في نقطة (φ, λ) عنصراً خطياً لا متناهياً في الصغر ds . يرسم هذا العنصر بطريقة الارتسام هذه حسب العنصر d^s ، ولدينا :

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \quad (1.7.7)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} dx &= R d\lambda \\ dy &= R d\varphi \end{aligned} \quad : (3.3.1) \quad (3.3.6)$$

ومنه تصبح العلاقة (3.3.5) بأخذ ال (3.3.6)

$$ds^2 = R^2 (d\lambda^2 + d\varphi^2) \quad (3.3.7)$$

وتكون نسبة التغير الطولي

$$m^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{d\varphi^2 + d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2} \quad (3.3.8)$$

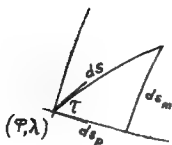
إذا كان العنصر ds محمولا على خط الزوال فعندها لدينا
(ثابت $\lambda = 0$) أى $d\lambda = 0$ وتمطينا العلاقة السابقة نسبة
التغير الطولي حسب خطوط الزوال ونجد $m_m = 1$ أى أن
خطوط الزوال ترسم بدون تغير في الأطوال • وإذا كان العنصر
 ds محمولا على الموازى فلدينا (ثابت $\varphi = 0$) أى $d\varphi = 0$
ونجد من العلاقة (3.3.8)

$$m_p = \frac{1}{\cos\varphi} \quad (3.3.9)$$

فالتغير الطولي بالنسبة للموازيات يزداد كلما ابتعدنا عن خط
الاستواء •

ان الزوايا بين خطوط الزوال والموازيات على الكرة هي قائمة وترسم
في طريقة الارتسام هذه كزوايا قائمة ، لكن هذه الخاصة لا تعني
ان الارتسام مطابق • بالحقيقة لنعتبر في النقطة (φ, λ)
على الكرة العنصر الخطي ds ، ولكن τ الزاوية التي يصنعها
هذا العنصر مع الموازى الخارج من (φ, λ) (شكل 3.3.2)
بتحليل العنصر ds الى عنيين الاول ds_p محمول على الموازى

والثاني ds_m محمول على خط الزوال يمكننا ان نكتب



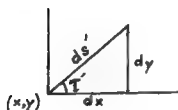
$$\operatorname{tg} \tau = \frac{ds_m}{ds_p} \quad (3.3.10)$$

ولكن لدينا :

$$ds_m = R d\varphi \quad (1.7.4)$$

$$ds_p = R \cos \varphi d\lambda \quad (1.7.5)$$

وطه تصبح العلاقة (3.3.10)



$$\operatorname{tg} \tau = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \quad (3.3.11)$$

(شكل 3.3.2)

ان العنصر ds يرسم في المستوى حسب ds صاعدا زاوية τ مع
مرسم الموازي أى مع الموازي للمحور ox فيمكننا ان نكتب :

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{dy}{dx} \quad (3.3.12)$$

او بادخال قيم dx و dy حسب (3.3.6) :

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (3.3.13)$$

ومن العلاقتين (3.3.11) و (3.3.12) نجد

$$\operatorname{tg} \tau' = \operatorname{tg} \tau \cdot \cos \varphi \quad (3.3.14)$$

نستنتج من هنا انه من اجل $\varphi = 0$ (خط الاستواء) لدينا $\tau = \tau'$
أما بشكل عام : ($\tau \neq \tau'$) للبرهن الان في هذا الارتسام ، على
الشرط الثاني من نظرية تيسو (Tissot)

من العلاقات (1.7.4) و (1.7.5) و (3.3.6) يمكننا ان نكتب :

$$dy = ds_m , \quad \cos \varphi dx = ds_p$$

$$dy^2 + \cos^2 \varphi dx^2 = ds_m^2 + ds_p^2 = ds^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\boxed{\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dx^2}{\frac{ds^2}{\cos^2 \varphi}} = 1} \quad (3.3.15)$$

فاذا اعتبرنا (ثابت $ds =$) نحصل على الكرة على دائرة مركزها النقطة (φ, λ) • والمعادلة (3.3.15) تعطينا معادلة المرتسم وهي قطع ناقص •



(شكل 3.3.3)

يقبل هذا الارتسام تعريفا هندسيا اذ نحصل عليه (شكل 3.3.3) باعتبار اسطوانة ماسة على طول خط الاستواء وتمثل خطوط الزوال بعوليات على الاسطوانة وتمثل الموازيات على الكرة بموازيات الاسطوانة لها نفس تباعد موازيات الكرة • بشر الاسطوانة نحصل على طريقة التمثيل المستوى المعرفة اعلاه •

لايستعمل في الوقت الحاضر هذا الارتسام اذ لايميز له مستغاض عنه بارتسام ميركاتور •

(3.4) — ارتسام ميركاتور (MERCATOR)

ان ارتسام ميركاتور مطابق • أى يحافظ فيه على الزوايا • وهو ارتسام اسطوانى يقبل تعريفا هندسيا فباعتبار اسطوانة ماسسة على طول خط الاستواء تمثل خطوط الزوال بمولدات الاسطوانة كما في حالة الارتسام السابق • وتمثل الموازيات بموازيات على الاسطوانة بحسب تباعد ما ببطيئة لحمل معها على ارتسام مطابق أى ان قوانين التحويل في ارتسام ميركاتور :

$$\begin{aligned} x &= R \lambda \\ y &= R f(\varphi) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

حيث $f(\varphi)$ تابع لزاوية العرض φ سنعين هذا التابع بشكل نحصل فيه على ارتسام مطابق •

$$\text{tg } \tau = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \quad \text{لقد وجدنا} \quad (3.3.11)$$

$$\text{tg } \tau' = \frac{dy}{dx} \quad \text{وكذلك} \quad (3.3.12)$$

فلكي يكون الارتسام مطابقا يجب ان يكون لدينا $(\tau = \tau')$ أى :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda}$$

ومنه بالاستعانة بـ (3.4.1) وتعمير dy و dx نجد :

$$\frac{R df(\varphi)}{R d\lambda} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda}$$

$$df(\varphi) = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad \text{أى} \quad (3.4.2)$$

ومن

$$f(\varphi) = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} = \int_{\pi}^{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.4.3)$$

وتصبح قوانين التحول (3.4.1)

$$\begin{aligned} x &= R \lambda \\ y &= R \int_{\pi}^{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2} R \int_{\pi}^{\pi} \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

سني الكمية $\mathcal{L} = \int_{\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ بالعرض المتزايد او تحول ميركاوير
لحسب نسبة التغير الطولي m لدينا

$$\begin{aligned} ds &= R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \\ ds'^2 &= dx^2 + dy^2 = R^2 (d\lambda^2 + df(\varphi)^2) \end{aligned}$$

وبادخال قيمة $df(\varphi)$ من (3.4.2) نجد :

$$ds'^2 = R^2 \left(d\lambda^2 + \frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{R^2}{\cos^2 \varphi} (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2)$$

فتكون نسبة التغير الطولي :

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (3.4.5)$$

نلاحظ انه كما ذكرنا في الفقرة (3.2) في حالة الارتباطات المطابقة

ان نسبة التغير الطولي لاتتعلق باتجاه العنصر ds بل هي ثابتة

فقط لوضع النقطة (φ بالعلاقة 3.4.5)

لنبرهن الان على الخطر الثاني من نظرية تيسو باعتبار هذا الارتباط
مطابقة. لدينا :

$$dx = R d\lambda$$

$$dy = R df(\varphi) = R \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

بالاستعانة بالعلاقين (1.7.4) و (1.7.5) نجد :

$$dx = \frac{ds_p}{\cos \varphi} \quad dy = \frac{ds_m}{\cos \varphi}$$

بتجميع وجمع هاتين العلاقتين مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقة (1.7.6) نجد :

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} (ds_p^2 + ds_m^2) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} ds^2$$

$$\boxed{\frac{dx^2}{\left(\frac{ds}{\cos \varphi}\right)^2} + \frac{dy^2}{\left(\frac{ds}{\cos \varphi}\right)^2} = 1} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix}$$

فن اجل (ثابت = ds) نحمل على دائرة لا مقامية في الصغر مركزها النقطة (φ, λ) وتبين لنا العلاقة الأخيرة ان مرسوم هذه الدائرة هي دائرة •

لقد وضع ميركاتور هذا الارتسام في عام ١٥٦٩ ولاقى مجالا كبيرا في البحيرة ، فمن السهل ان تتبع السفينة طريقا ثابتا نحو نقطة معينة وتقطع في سيرها كل خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة ان المسار المتبع الذي يقطع خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة يسمى باللوكسودرومي (*loxodromie*) وهو منحني على الاطلاق أو الكرة • لقد وجدنا في ارتسام ميركاتور ان خطوط الزوال تمثل بمستقيمت متوازية (موازية لمحور oy) وهذا ان الارتسام مطابق لمرسوم اللوكسودرومي هو خط مستقيم لان الخط المستقيم هو الذي يقطع في هذا الارتسام خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة • وهكذا

نرى انه في هذا الارتسام يكفي قياس الزاوية على الخريطة والمحافظة عليها لاتباع اللوكسودرومي .

ان هذا الحل بسيط ولكنه غير اقتصادي لان ارتسام ميركاتور يغير في الاطوال تغييرا هائلا كلما ابتعدنا عن خط الاستواء . ان اللوكسودرومي ليس اقصر طريق بين نقطتين ، بل يسمى اقصر طريق بالاورتودرومي (Orthodromie) وهو على الكرة قوس دائرة عظمى تقطع خطوط الزوال حسب زوايا متغيرة بين نقطة واخرى ، لذلك يستخدم في الملاحة في اغلب الاحيان طريق مولف من اقصواس لوكسودرومية تصل بين نقاط من الاورتودرومي ، ففي ارتسام ميركاتور يكون الطريق عندئذ مولفا من قطع مستقيمة .

- يستخدم ايضا ارتسام ميركاتور لوضع خرائط الطابق الاستوائية .
- (3.5) — ارتسام ميركاتور العرضاني او ارتسام غوس (Gauss) .

ان ارتسام ميركاتور العرضاني هو من الناحية الهندسية ارتسام ميركاتور السابق لكن خط زوال مبدئي يلعب نفس دور خط الاستواء فالاستوائية تكون ماسة على طول خط زوال مبدئي يعر بشكل عام فسي منتصف المنطقة المراد تمثيلها .

نعتبر خط الزوال المبدئي POR

العمودي على مستوى اللوح

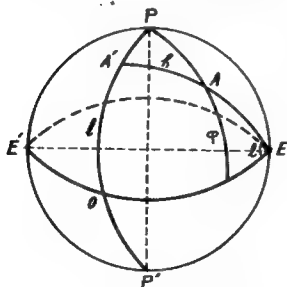
(شكل 3.5.1) ولتكن A نقطة

من الكرة ذات احداثيات (λ, φ)

ان خط الاستواء عمودي على خط

الزوال POP' نقطتها خط الزوال

هذا أي E و E' يقعان على خط



(شكل 3.5.1)

الاستواء • لرسم من النقطة A الدائرة العظمى EAA'

نقطع خط الزوال POP' في النقطة A' للرمز :

$$OA' = \ell, \quad A'A = h$$

ان كل نقطة من الكرة يمكن تمثيلها بالاحداثيات العمودية الطولية
(ℓ, h) ملاحظان h بالنسبة لخط الزوال POP' طعرب دور

φ بالنسبة لخط الاستواء ، وكذلك طعرب ℓ دور λ فسادا

طبقا ارتسام مركزا دور السابق ولكن باعتبار الاحداثيات (ℓ, h)

عوضا عن (φ, λ) نحصل على φ مرسوم OP و λ مرسوم

OE ونجد القوانين التالية التي هي نفس القوانين (3.4.4)

ولكن بالنسبة للاحداثيات الجديدة (ℓ, h)

$$x = R \ell_n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} R \ell_n \frac{1+\sin h}{1-\sin h}$$

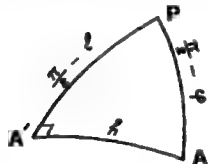
(3.5.1)

$$y = R \ell$$

لكن هذه القوانين ليست قوانين تحويل للاحداثيات الجغرافية

الى احداثيات مستوية لذلك عليها الان حساب (ℓ, h) بدلالة

(φ, λ)



لدينا من الطول الكروي القائم

PA'A (شكل 3.5.2) قانون

الجيب :

$$\frac{\sin \lambda}{\sin h} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

(شكل 3.5.2)

وبعد

$$\sin h = \sin \lambda \cos \varphi$$

(3.5.2)

ولدينا قانون الجيب بالنسبة للضلع ($\frac{\pi}{2} - \varphi$)

$$\sin \varphi = \cos h \sin \ell$$

(3.5.3)

ويعطينا قانون التجيب بالنسبة للضلع h :

$$\cos h = \sin \varphi \sin l + \cos \varphi \cos l \cos \lambda$$

وبادخال قيمة $\cos h$ هذه في العلاقة (3.5.3) نجد :

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} \quad (3.5.4)$$

ومنه :

$$l = \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} \quad (3.5.5)$$

بادخال (3.5.2) و (3.5.5) نحصل على قوانين التحويل في

ارصاد ميركاتير المرصاتي :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} R \ln \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda} \\ y &= R \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

بوضع (ثابت = φ) في هاتين المعادلتين نجد المعادلتين
الوسيطتين لمرصم الموازي (ثابت = φ) وكذلك بوضع
(ثابت = λ) في هاتين المعادلتين نجد المعادلتين
الوسيطتين لمرصم خط الزوال (ثابت = λ) .

من الطبيعي أن هذا الارصاد مطابق . يمكننا حساب نسبة
التضخم الطولي في نقطة من العلاقة (3.4.5) على أن نعوض

$$m = \frac{l}{\cos h} \quad \varphi = h \text{ فنجد :}$$

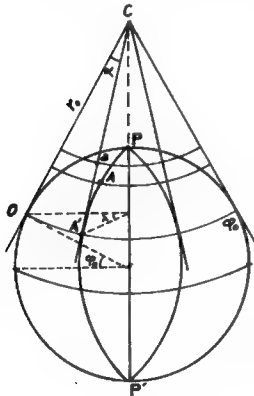
وبادخال (3.5.2) في هذه العلاقة نجد العلاقة التالية :

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}} \quad (3.5.7)$$

التي تعطينا نسبة التضخم الطولي بدلالة الاحداثيات الجغرافية
للنقطة :

ان هذا الارتسام مستخدم حاليا بشكل كبير وقد استخدم في
العالم والدول السكندنافية ونيظانيا ، يسمى بارتسام $U.T.M.$
($Universal Transverse Mercator$)
(3.6) — ارتسام لامبير ($Lambert$) :

لنعتبر المخروط المساس للكرة على طول العوازي البار من منتصف
المسطحة المراد تمثيلها في نقطة O ذات زاوية العرض φ_0 ان رأس هذا
المخروط C يقع على امتداد خط القطبين PP' (شكل 3.6.1)



(شكل 3.6.1)

لنمثل على هذا المخروط خطوط الزوال
بمولدات المخروط ، فخط زوال $PA A'$
على الكرة يمثل مولد للمخروط مساس لخط
الزوال هذا في النقطة A' ، حيث A' نقطة
تقاطع العوازي البار من O مع خط الزوال
البار من A .

ولنمثل موازيات الكرة بموازيات على المخروط
ولنحدد تباعدها فيما يلي بشكل يصبح
فيه الارتسام مطابقا . اذا شرنا هذا
المخروط حصلنا على الشكل (3.6.2)

في طريقة الارتسام هذه تمثل خطوط

الزوال بمستقيمات متلاقية في النقطة C أما الموازيات فتمثل بدوائر
متمركز ذات مركز C وانصاف اقطار r لم تحدد الى الان .

لايجاد قوانين التحويل في هذا الارتسام نعتبر محورين
متعامدين (oxy) المحور oy مطبق على الحول Co المثل
لخط الزوال المبدئي ومتجه نحو الشمال أما المحور ox فعمودي

عليه ومماس للدائرة المطة للموازي φ_0 (دائرة تماس الكرة مسطح المخروط) .

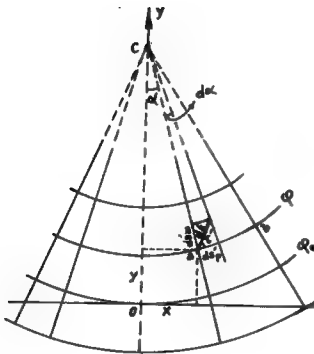
للمعتبر (شكل 3.6.2)

المستقيم المثل لخط الزوال الطار من A ولكن α الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع المحور oy كما تكون الدائرة ab ذات المركز c المطة للموازي φ الطار من A والتي هي مواز للمخروط قبل نشره .

لنرمز $r = ca$ و $r_0 = cb$

فاحداثيات النقطة a المطة لـ A هي :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \alpha \\ y &= r_0 - r \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.6.1)$$



(شكل 3.6.2)

ان r_0 هو طول المولد (شكل 3.6.1) وهو نصف قطر الدائرة aa المطة للموازي φ_0 ونلاحظ من الشكل (3.6.1) ان قيمة r_0 يمكن حسابها من العلاقة :

$$r_0 = R \cotg \varphi_0 \quad (3.6.2)$$

لحساب الان قيمة α

لدينا على الكرة (شكل 3.6.1)

$$OA' = R \cos \varphi_0 \cdot \lambda$$

حيث λ زاوية الطول بين خط الزوال المبدئي وخط الزوال المار

من A و $R \cos \varphi_0$ نصف قطر الموازي الطار من A

نلاحظ بسهولة انه في طريقة الارتسام هذه ، محافظة على الاطوال

حسب الموازى φ_0 فلدينا :

$$OA' = OA' = R \cos \varphi_0 \cdot \lambda$$

ومن ناحية ثانية (شكل 3.6.2) لدينا

$$OA' = r_0 \cdot \alpha$$

بكتابة تساوى العالقتين الاخيرتين نجد :

$$r_0 \cdot \alpha = R \cos \varphi_0 \cdot \lambda$$

وبادخال (3.6.2) نجد :

$$\alpha = \lambda \sin \varphi_0 \quad (3.6.3)$$

يبقى علينا الان تعيين r وسنعيده للحصول على ارتسام مطابق .

لنعتبر على الكرة في النقطة A عمرا جزئيا ds يصنع مع الموازى المار

من A زاوية τ . لقد وجدنا (3.6.3) :

$$\tan \tau = \frac{d \varphi}{\cos \varphi d \lambda} \quad (3.3.11)$$

ليكن ds' مرسم ds في الارتسام السابق (شكل 3.6.2)

يمكننا ان نحلل ds' الى مركبتين متعامدتين

الاولى ds'_m محمولة على مرسم خط الزوال

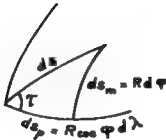
في A والثانية ds'_p محمولة على مرسم

الموازى في A .

ان مرسم الزاوية τ هي بشكل عام τ'

(شكل 3.6.2) يمكننا ان نكتب : (شكل 3.6.3)

$$\tan \tau' = \frac{ds'_m}{ds'_p} \quad (3.6.4)$$



ولكن لدينا (شكل 3.6.2) : (3.6.5)

$$ds'_m = dr$$

$$ds'_p = r d\alpha$$

وبادستال تفاضل $d\alpha$ من (3.6.3) تصبح العلاقة الأخيرة :

$$ds'_p = r \sin \varphi_0 d\lambda \quad (3.6.6)$$

ومنه تصبح العلاقة (3.6.4) باستخدام (3.6.5) و (3.6.6)

$$\tau_0 T' = \frac{dr}{r \sin \varphi_0 d\lambda} \quad (3.6.7)$$

سنختار r بشكل يصبح فيه الارتسام مطابقاً أى $T = T'$ فنكتبه
تساوى العاقتين (3.3.11) و (3.6.7) نجد بعد الأخذ بعين
الاعتبار أنه عندما تتزايد r تتناقص φ والعكس بالعكس :

$$\frac{dr}{r} = - \sin \varphi_0 \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (3.6.8)$$

لنجد تكامل المعادلة (3.6.8) :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = - \sin \varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

ومنه

$$\ln r - \ln r_0 = \ln \frac{r}{r_0} = - \sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \quad (3.6.9)$$

$$\mathcal{L} = \ln \tau_0 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

حيث

$$\mathcal{L}_0 = \ln \tau_0 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (3.6.10)$$

فيكتبنا استنتاج من المعادلة (3.6.9)

$$r = r_0 e^{-\sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)} \quad (3.6.11)$$

لندخل الآن (3.6.2) ، (3.6.3) و (3.6.11) في المعادلتين

(3.6.1) نجد :

$$\begin{aligned} x &= R \cotg \varphi_0 \sin(\lambda \sin \varphi_0) e^{-\sin \varphi_0 (\lambda' - \lambda_0)} \\ y &= R \cotg \varphi_0 \left[1 - \cos(\lambda \sin \varphi_0) e^{-\sin \varphi_0 (\lambda' - \lambda_0)} \right] \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

وهي قوانين التحويل في ارتسام لا مبر وهو ارتسام مطابق .

لحساب الان نسبة التغير الطولي لدينا :

$$m = \frac{ds}{ds'}$$

ولكن

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \quad (1.7.7)$$

وكذلك

$$ds'^2 = ds_m'^2 + ds_p'^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \varphi_0 d\lambda^2 \quad (3.6.13)$$

وذلك بعد الاخذ بعين الاعتبار العلاقتين (3.6.5) و (3.6.6)

لندخل الان في (3.6.13) قيمة dr مأخوذة من (3.6.8) فنجد

$$ds'^2 = r^2 \sin^2 \varphi_0 \frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + r^2 \sin^2 \varphi_0 d\lambda^2 = \frac{r^2 \sin^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2)$$

ونجد

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{r \sin \varphi_0}{R \cos \varphi} \quad (3.6.14)$$

كما تبين لنا هذه العلاقة ان مرسوم دائرة لا متناهية في الصغر

(ثابت = ds) هو دائرة (حيث نجد من هذه العلاقة ثابت = ds')

لقد استخدم هذا الارتسام في وضع خرائط فرانساً بمقر

$$\frac{1}{20000} \text{ و } \frac{1}{50000} \text{ و } \frac{1}{100000}$$

كما استخدم لوضع خرائط سورية ولبنان ذات القياس

$$\frac{1}{50000}$$

$$\frac{1}{200000} \text{ و } \frac{1}{500000}$$

(3.7) الارتسامات القطبية :

لنعتبر مستطاً للارتسام ونقطة للنظر ننظر منها الى السطح .

ولنأخذ تقاطع الأشعة أو امتدادها مع مستوى الارتسام ، لنحصل على تمثيل صغير للسطح أو لجزء منه ، نسمي هذا الارتسام بالارتسام العنظوري . نلاحظ ان الارتسام العنظوري يتغير بتغير نقطة النظر ووضع مستوى الارتسام ، فلدينا عدد لا نهائي من الارتسامات العنظورية .

نقول ان الارتسام قطبي عندما نختار مستوى الارتسام مناسباً للكرة في القطب ، وعندما نعتبر نقطة النظر واقعة على خط القطبين . يمكننا ان نختار نقطة النظر في مركز الكرة وعندما نحصل على ارتسام مركزي ، يمكننا اختيارها نقطة القطب نظيرة نقطة تماس مستوى الارتسام بالنسبة لمركز الكرة وعندما نسمي الارتسام بالاستيريوغرافي القطبي ، وهكذا فلدينا عدد كبير من الارتسامات العنظورية القطبية .

ليكن H مستوى الارتسام مناسباً للكرة في النقطة P . لنعتبر نقطة النظر C واقعة على خط القطبين وعلى بعد k من مركز الكرة نحصل على مرسم نقطة A من الكرة يوصل النقطة A بالنقطة C ويتحدد هذا الاتجاه حتى تلاقيه مع المستوى H في النقطة a فنكون a مرسم A ، (شكل 3.7.1) .

نلاحظ بسهولة انه مهما كانت قيمة k فان خطوط الزوال تمثل بمستقيمات متالفة في النقطة P ، أما الموازيات فتمثل بدوائر متمركزة ذات مركز P .

يمكننا تعريف هذا الارتسام تحليلياً بسهولة بإيجاد قوانين تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات قطبية (θ, φ) فسي المستوى ، حيث θ هي الزاوية التي يقطعها الشعاع $(P \rightarrow r)$ مع مستقيم من المستوى نعتبره مرسم خط الزوال العادي ، و φ

• نصف قطر مرسم الموازي الطار من A

$$\theta = \lambda$$

لدينا (3.7.1)

لنحسب الآن r • لدينا من تشابه المثلثين CDA و CPa

(شكل 3.7.2)

$$r = \frac{R \cos \varphi (k + R)}{k + R \sin \varphi}$$

(3.7.2)

فمن اجل $k = 0$ نحصل على ارشام مركزي

ومن اجل $k = R$ نحصل على ارشام ستيويوغرافي القطبي

ومن اجل $k = 2R$ نسي الارشام بازسام بوسجل (G.Postel) • الخ

وسندرس هنا فقط الارشام

الستيويوغرافي القطبي الذي هو

ارشام مطابق •

(3.8) - الارشام الستيويوغرافي القطبي :

لنعتبر في هذا الارشام

مستوى التحليل المستوي العاين

للكرة في احد القطبين ونقطة

النظري القطب الاخر •

لقد بينا في الفقرة السابقة

ان خطوط الزوال تمثل بمستقيمتين

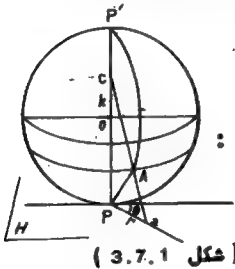
متالفتين في نقطة التماس • أما

الموازيات فتمثل بدوائر متركزة

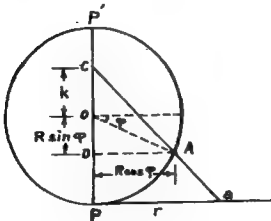
مركزها القطب العاين للمستوى

لدينا اذن جملة متعامدة فسي

المستوى هي مرسم الجطسة



(شكل 3.7.1)



(شكل 3.7.2)

المعاداة (φ, λ) على الكرة •

يمكننا إيجاد قوانين تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات

قطبية في المستوى من العلاقتين (3.7.1) و (3.7.2) بوضع $k = R$

فجد :

$$\theta = \lambda \quad (3.8.1)$$

$$r = R \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (3.8.2)$$

ان الاوسام الستيريوغرافي القطبي مطابق • ولبرهان ذلك

نعتبر على الكرة العنصر الخطي ds في النقطة $A(\varphi, \lambda)$ ولتكن τ

الزاوية التي يصنعها هذا العنصر مع الموازي الطار من A و ds_m

و ds_p مركبتي ds حسب خط الزوال والموازي الطارين • A

ان مرسم A هي النقطة a

(شكل 3.8.1) احداثياتها (θ, r)

معطاة بالعلاقتين (3.8.1) و

(3.8.2) فيكون مرسم العنصر ds

هو ds' ذا مركبتين الاولى dr

مائلة لـ ds_m ومحمولة على نصف قطر

الدائرة الطارة من a والثانية $(rd\theta)$ (شكل 3.8.1)

مائلة لـ ds_p ومحمولة على محيط

الدائرة الطارة من a • ان مرسم الزاوية τ هي الزاوية τ' التي

يصنعها العنصر ds' مع مرسم الموازي الطار من a

يمكننا ان نكتب :

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \quad (3.3.11)$$

ومن الشكل (3.8.1) :

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{dr}{r d\theta} \quad (3.8.3)$$



ولكن من قوانين التحميل (3.8.1) و (3.8.2) نجد

$$d\theta = d\lambda \quad (3.8.4)$$

$$dr = 2R \frac{d\varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (3.8.5)$$

• وذلك باعتبار تناقص r عند ازدياد φ وبالعكس.

بادخال قيمة dr و $d\theta$ في (3.8.3) نجد :

$${}_s T' = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda}$$

مما يهذه العلاقة مع العلاقة (3.3.11) نستنتج ان $T = T'$

• أي ان الارتسام مطابق

لنحسب الان نسبة التغير الطولي :

لدينا :

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \quad (1.7.7)$$

ومن الشكل (3.8.1)

$$ds'^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

وبادخال (3.8.4) و (3.8.5) و (3.8.2)

$$ds'^2 = \frac{4R^2 d\varphi^2}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} + \frac{4R^2}{(1 + \sin \varphi)^2} \cos^2 \varphi d\lambda^2 = \frac{4}{(1 + \sin \varphi)^2} R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2)$$

وطه نجد

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{2}{1 + \sin \varphi} \quad (3.8.6)$$

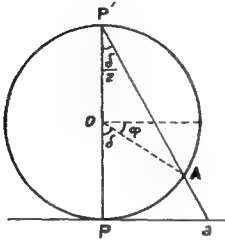
يمكننا ايجاد علاقة ثانية لـ m .

لنعتبر خط الزوال الخارج من A (شكل 3.8.2) ولنضع $\hat{P}OA = \delta$

فيكون لدينا $\hat{P}PA = \frac{\delta}{2}$ و $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$

بادخال δ في العلاقة (3.8.6) نجد :

$$m = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} = \frac{2}{1 + \cos \delta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{\delta}{2}$$



ولكن لدينا من الشكل (3.8.2) :

$$\tan^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r^2}{4R^2}$$

فتصبح قيمة m :

$$m = \frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{r^2}{4R^2} \quad (3.8.7)$$

تعطينا هذه العلاقة نسبة التغير

الطولي بدلالة بعد النقطة a

عن مركز الارتسام P •

تطبيق : لنفرض $R = 6400$ و $r = 150$ km. نجد

$$m = 1 + \frac{r^2}{4R^2} = 1 + 1,37 \times 10^{-4}$$

فمن اجل ضلع ds مساوي كيلو متر على بعد 150 km. من مركز

الارتسام يعاين هذا الضلع في هذا الارتسام تغيراً طويلاً قدره 13.7 cm.

لايجاد قوانين تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات عودية

في المستوى نعتبر في مستوى التمثيل محورين للاحداثيات ، الاول

P_y مماس لخط الزوال المبدئي والثاني P_x عمودي عليه • يمكننا

ان نكتب :

$$x = r \sin \theta$$

$$y = r \cos \theta$$

بادخال قيمة r و θ حسب العلاقتين (3.8.1) و (3.8.2) نجد :

$$x = 2R \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \sin \lambda$$

$$y = 2R \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cos \lambda$$

(3.8.8)

للارتسام السطحيوغرافي خاصة عامة هي التالية :

بتطبيق ارتسام سطحيوغرافي للكرة على المستوى ترسم كل دائرة كعبرة أو صغيرة على الكرة حسب دائرة أو مستقيم • لقد وجدنا هذه الخاصة بالنسبة لخطوط الزوال التي ترسم كمستقيمات وبالنسبة للعوازيات التي ترسم كدوائر • لنبرهن هذه الخاصة بالنسبة لدائرة ما •

لذلك نعتبر دائرة صغيرة T_1, T_2, T_3, T_4 مرسومة على الكرة

(شكل 3.8.3) وليكن Q رأس

المخروط وذو الرأس Q العاين للكرة

على طول هذه الدائرة • ان

رأس المخروط Q يرسم بالارتسام

السطحيوغرافي القطبي في النقطة q .

أما مولدات المخروط فتترسم

حسب مستقيمت مارة بالنقطة q •

ان نقاط تماس المولدات T_1, T_2, \dots (شكل 3.8.3)

مع الدائرة الصغيرة موجودة على الكرة ، وأما الزوايا بين

المولدات والدائرة هي قائمة ، وبما ان الارتسام مطابق فالزوايا

يحافظ عليها أي أن مرسم الدائرة T_1, T_2, T_3 يصنع زوايا قائمة مع

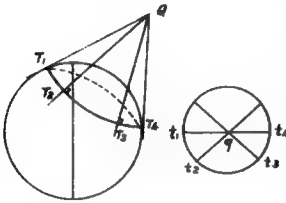
مرسعات المولدات ، فهذا المرسم هو دائرة مركزها q • ونحصل

على نفس النتيجة إذا اعتبرنا دائرة كبرى على الكرة ، ففي هذه الحالة

يتحول المخروط الى اسطوانة •

سنستفيد من هذه الخاصة لحساب قيم التصحيحات في الارتسام

السطحيوغرافي •



لنعتبر المثلث الكروي PAB (شكل 3.8.4) ان الضلع

PA والضلع PB هما خطا زوال ، فترسمهما مستقيمان $P\alpha$ و $P\delta$

أما الضلع AB فهو قوس دائرة

عظمى ، فترسم حسب قوس

دائرة $\widehat{\alpha\delta}$ وذلك بموجب الخاصة

السابقة .

بما ان الارشام مطابق

فرواها المثلث الكروي يجب ان

تساوى لزوايا المثلث المسطح

ذى الضلع المحني $\widehat{\alpha\delta}$ وهذا ما

نعمده بالمحافظة على الزوايا

(3.1) فالزاوية فسي

النقطة α بين $P\alpha$ والمماس للمحني (شكل 3.8.4)

$\widehat{\alpha\delta}$ تساوى للزاوية الكروية المقابلة α وكذلك فان الزاوية في النقطة

δ بين $P\delta$ والمماس للمحني $\widehat{\delta\alpha}$ تساوى للزاوية الكروية المقابلة β .

لنرمز بـ δ_1 و δ_2 بزوايا الاختزال الى الوتر .

بما ان القوس α هو قوس دائرة ، فلدينا $\delta_1 = \delta_2$ يمكننا

ان نكتب :

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^{\text{gr}} + \epsilon \quad (3.8.9)$$

حيث ϵ هي الزيادة الكروية في المثلث .

لنضع $\alpha = \alpha' + \delta_1$ و $\beta = \beta' + \delta_2$ حيث $\alpha' = \widehat{P\alpha\delta}$ و $\beta' = \widehat{P\delta\alpha}$

ومنه تصبح العلاقة (3.8.9)

$$\alpha' + \beta' + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 200^{\text{gr}} + \epsilon$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma = 200 \quad \text{ولكن لدينا}$$

$$d_1' = d_2' = \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.8.10) \quad \text{نستنتج اذن:}$$

وحسب العلاقة (2.3.3)

$$\boxed{d_1'' = d_2'' = \int'' \frac{T}{2R^2}} \quad (3.8.11)$$

حيث T مساحة المثلث الكروي ، بما ان d_1' و d_2' ذات قيم صغيرة

فيكونا اعتبار مساحة المثلث الكروي مساوية لمساحة المثلث Pab

دون ان تتأثر النتائج ، فاذا اعتبرنا (x_a, y_a) و (x_b, y_b)

احداثيات النقطتين a و b (مقروئين من مستوى التمثيل) فبان

مساحة المثلث تكون على اعتبار رأس المثلث P مبدأ للاحداثيات :

$$T = \frac{x_a y_b - x_b y_a}{2}$$

وتصبح العلاقة (3.8.11)

$$\boxed{d_1'' = d_2'' = \int'' \frac{x_a y_b - x_b y_a}{4R^2}} \quad (3.8.12)$$

ولذا كران R هو نصف قطر الكرة .

ان العلاقة (3.8.12) تسمح لنا بحساب زوايا الاختزال الى

الوتر ، أما لمعرفة اتجاه الزاويتين d_1' و d_2' بالنسبة للوتر فيكفي

ان ننسبه الى ان القوس \widehat{ab} دوما يوجه تقعره نحو مركز الارتمام P .

لنعتبر الان ممكنا كرها a مرسوما على الكرة . ان مرسم هذا

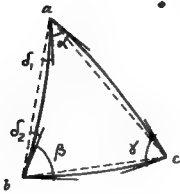
المثلث هو مثلث متعن abc ولدينا محافظة على الزوايا ، فالزوايا

(α, β, γ) بين المسارات للاضلاع المثلثية (شكل 3.8.5)

تساوى للزوايا الكروية المقابلة على الكرة . لحساب زوايا المثلث

المسطح ذي الاضلاع المستقيمة علينا اولا حساب قيم التصحيحات

الزاوية (d_1', d_2') بالنسبة لكل ضلع يمكننا ذلك بتطبيق العلاقة



• (3.8.12) بالنسبة لـ \widehat{ab} ثم \widehat{ac} ثم \widehat{bc}

لاقت طريقة الارتسام الستيغوغرافي

القطبي مجالاً واسعاً عندما اخذت

المسارات الجبهة بين الاتحاد السوفييتي

والولايات المتحدة أهمية استراتيجية

اذ ان المسارات بين الدولتين تمر

بالمناطق القطبية الشمالية ، يستخدم (شكل 3.8.5)

هذا الارتسام لتمثيل المناطق القطبية ، وايضا لوضع خريطة القبة

الساوية ، يستخدم في المناطق القطبية

هذا ولذا ذكر من مميزات هذا الارتسام ان المسارات الاورتودرومية

التي هي اقواس دوائر عظمى (خطوط جيوديزية) ترسم في طريقة

الارتسام هذه حسب دوائر في المستوى

(3.9) - الارتسام الستيغوغرافي الطائلي :

لكن σ منتصف الخطعة المراد تمثيلها ، للمعتبر المستوى

$\sigma \times y$ المماس في النقطة σ للكرة ، ولختر في هذا المستوى المحور

σy مماساً لخط الزوال الخارج من σ ونحجها نحو الشمال والمحور

σx عمودياً عليه ونحجها نحو الشرق . لكن σ' نظيرة النقطة σ

بالنسبة لمركز الكرة C . للمعتبر هذه النقطة σ' نقطة نظر ولنمثل

نقاط الكرة على المستوى $\sigma \times y$ ، فنقطة A على الكرة ترسم على

المستوى بموصل النقطة σ' بالنقطة A ثم بتمديد هذا الاتجاه الى

ان يلتقي مع المستوى في النقطة α التي تختبر مرسم النقطة A

(شكل 3.9.1) تسمى طريقة الارتسام هذه بالارتسام الستيغوغرافي

الطائلي

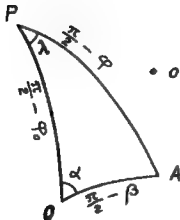
ان هذا المستوى الاخير يقطع الكرة حسب قوس الدائرة العظمى OA ، فالزاوية α هي الزاوية في النقطة O بين المسار لخط الزوال المبدئي والمسار لقوس الدائرة OA ، فهي اذن زاوية السمت الجغرافي لـ OA وهي في مستوى التمثل بين المحور Oy والمستقيم $O\alpha$.
ان قوانين تحويل الاحداثيات (α, β) الكروية الى احداثيات عمودية x, y في مستوى الارصاد هي حسب العلاقتين (3.8.8) :

$$\begin{aligned} x &= 2R \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \sin \alpha \\ y &= 2R \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

أما العلاقات التي سبق ان وجدناها بشكل مستقل من الاحداثيات الجغرافية فهي نفسها كالعلاقة (3.8.7) والعلاقة (3.8.11) والعلاقة (3.8.12) .

الا انه علينا ان نعطي قوانين التحويل (3.9.1) بدلالة الاحداثيات الجغرافية (φ, λ) ، لذلك نستعين بالمعطيات الكروية ، فلدينا في المثلث الكروي POA (شكل 3.9.1) و (شكل 3.9.2) .

العناصر التالية :



(شكل 3.9.2)

حيث φ زاوية عرض النقطة O .

$$PO = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$PA = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$OA = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\hat{P}OA = \lambda$$

$$\hat{PO}A = \alpha$$

ان علاقة الجيب بالنسبة للضلع OA تكتب على الشكل :

$$\sin \beta = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda \quad (3.9.2)$$

وعلاقة الجيب تعطينا

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos \varphi \sin \lambda \quad (3.9.3)$$

أما علاقة الجيب بالنسبة للضلع PA فهي

$$\sin \varphi = \sin \beta \sin \varphi_0 + \cos \beta \cos \varphi_0 \cos \alpha$$

من هذه العلاقة الأخيرة نستنتج :

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sin \varphi - \sin \beta \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}$$

وبادخال (3.9.2) نجد

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi \sin^2 \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}$$

ونحصل

$$\cos \alpha \cos \beta = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi_0 \quad (3.9.4)$$

وبالتبديل في (3.9.1) نجد

$$\begin{aligned} x &= 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda} \\ y &= 2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi_0}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda} \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

ان الارسام السيميوجرافي العائل يناسب العاطق التي هي على شكل كرة • وهو مستخدم في الدوائر العقارية في سوريا

ولبيان لوضع الخرائط وقد اعتبرت θ في تدريسها الاحداثيات
المستخدمة في الدوائر المقابلة الى محورين ox و oy .
(10 . 3) — قاعدة الارتسامات المطابقة :

هناك حقيقتان هامتان دفعنا الجيوديزيين الى الاهتمام
بالارتسامات المطابقة :

١ — فخلال الحرب العالمية الاولى تطلبت الدفعة ارتسامات مطابقة
لعمليات التحشير للتصويب الصحيح والسريع ، لان هذه الارتسامات
تحافظ على الزوايا ، فالزوايا المعينة على الخريطة تساوى للزاوية
المقاسة على الطبيعة ، لكننا سبق ان ذكرنا انه يجب ان نفهم
بالمحافظة على الزوايا في ارتسام مطابق هو ان الزاوية بين
قوسين على الكرة أو الاهليج تساوى للزاوية بين المقاسين
لمرسمي القوسين ، وان مرتصات الاقواس على الكرة أو الاهليج
هي بشكل عام ممحنيات في المستوى ، فها ان الزوايا التي
نعتبرها على الخريطة هي بين مستقيمتين لا ممحنيات مستقيمة
لذلك يبدو لنا ان هذه المحافظة على الزوايا هي مهمة ، اذ
يجب اضافة زوايا الاختزال الى الوتر للحصول على الزوايا المقاسة
على سطح الارض .

لكن زوايا الاختزال الى الوتر هي صغيرة بشكل عام ويمكن
اهمالها في هذه المجالات .

٢ — هناك ميزة كبرى في استخدام ارتسام مطابق بالنسبة لعمليات
التخطيط من الدرجة الرابعة (الفصل الرابع) والمساواة بالتخطيط
المعقاري ، ففي هذه العمليات غالباً ما نعين النقاط بمعطيات

القطاع والتفهم المستعدة الى قياس زوايا افقية فقط ، فالزوايا
ترسم على المستوى بقيمتها ، يمكننا غالباً احوال قيم زوايا
الاختزال الى الوتر لحساب بسهولة الاحداثيات العمودية
لهذه النقاط فوراً على مستوى التمهيد دون اللجوء الى
حسابات على الكرة أو الاهلج ثم تحويل الاحداثيات
الجغرافية الى احداثيات عمودية باستخدام قوانين التحويل
للارتسام . هذا وإذا اردنا بشكل عام حساب الاحداثيات
العمودية فوراً على المستوى يكفي حساب زوايا الاختزال الى
الوتر ومن ثم حساب الزوايا المستقيمة بين المستقيمتين بأن
نضيف (إضافة جبهة) زوايا الاختزال الى الزوايا الكروية
(أى القاسية) ، وتطبيق قوانين المثلثات المستقيمة وقوانين
الهندسة التحليلية المستقيمة لحساب الاحداثيات .
لقد بينا في الارتسام السمينوغرافي العلاقة (3.8.12)
التي تسمح بحساب زوايا الاختزال الى الوتر بدلاً من
الاحداثيات العمودية ولحسابها يكفي قراءة الاحداثيات
تخطيطياً بعد انشاء بسيط للنقاط على المخطط .
ولدينا في كافة الارتسامات المطابقة لقوانين تسمح بهذا
زوايا الاختزال استناداً الى الاحداثيات العمودية .

الفصل الرابع الشبكات الجيوديزية

(4.1) - تعريف الشبكات الجيوديزية وتقسيماتها :

لاجراء عمليات المسح ورسم المخططات في دولة ما يعتبر عدد من النقاط موزعة في مختلف المناطق ، تجسد هذه النقاط بشكل دائم على الارض وتحسب احداثياتها ، تشكل هذه النقاط هيكل اساسيا للامعال المساحية وتسمى بالنقاط الجيوديزية ، وهي تشكل ذروات شبكة من المخططات نسجها بالشبكة الجيوديزية للبلاد .

تفيدنا هذه الشبكة في عدد من المجالات ، فستعين بها في اعمال المساحة العقارية وستفيد منها في مختلف الاعمال المساحية في الهندسة المدنية لدراسة الطرق والجسور ومشاريع الري الخ ... تشكل هذه النقاط والمعتبرة صحيحة بالنسبة للامعال المساحية

قاعدة لكافة الاعمال المساحية ، فستطيع ان نطلق عليها ونؤسس مضلعات للمسح التفصيلي وان نحسب ذروات هذه المضلعات اعتمادا على احداثيات هذه النقاط وعلى قياسات المضلعات ، يمكننا تسخير هذه المضلعات على هذه النقاط ذات الاحداثيات المعروفة وذلك ضمن خلو المضلعات من الاختلاط ونؤمن تعديلا لاحداثيات ذروات المضلعات ما يزيد في دقة النتائج المساحية بشكل عام . ويجب ان لا ننسى انه لربط الاعمال المساحية بالشبكة الجيوديزية فائدة كبرى اذ تسمح بأن توجه المخططات المساحية توجيهها واحد هو نفس توجيه الخرائط العامة للبلاد .

ان احتياجات المساحة للنقاط الجيوديزية هي بمتوسط نقطة

كل ثلاثة كيلو مترات مربعة ، ويجب زيادة هذه الكثافة لأماكن أعمال
مساحية دقيقة في المناطق المأهولة والأراضي ذات السعر المرتفع أى
في مناطق الدرجة الأولى المحددة من قبل المصالح العقارية .

ينتج عن هذه الكثافة ، أن عدد النقاط الجيوديزية يجب
أن يكون كثيراً جداً وعليها أن تتخذ الاحتياطات الضرورية للحصول
على دقة واحدة لمختلف نقاط الشبكة . إذ أن الشرط الأساسي في
شبكة وهو تكافؤ الدقة في مختلف مناطق البلاد . أن هذا الشرط
يصعب تحقيقه إذا انطلقنا في تأسيس الشبكة اعتباراً من ضلع ما
وإنشأنا محطات أطوال أضلاعها بحدود ثلاثة كيلو مترات ، وأجهزها
القياسات اللازمة لتحديد إحداثيات الذروات إذ يترتب على طريقة
العمل هذه إجراء القياسات بدقة كبيرة لتقليل تراكم أخطاء القياسات
وهذا ما يؤدى إلى تكاليف باهظة .

نتوصل إلى نتيجة اقتصادية ودقيقة إذا أسسنا الشبكة العامة
على مراحل ، أى إذا أنشأنا أولاً شبكة من المحطات الكبيرة التي تفر
البلاد والتي تعتبر هيكلها رئيسياً لشبكة ثانية ثم أنشأنا شبكة ثانية
تستند على الأولى ثم شبكة ثالثة الخ

وعلى هذا الأساس تنقسم الشبكة الجيوديزية العامة إلى أربعة

أقسام :

- ١ — الشبكة الجيوديزية من الدرجة الأولى أو شبكة التثبيت الرئيسية .
- ٢ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثبيت) من الدرجة الثانية .
- ٣ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثبيت) من الدرجة الثالثة .
- ٤ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثبيت) من الدرجة الرابعة
والمسماة بشبكة التثبيت العقارية .

تألف الشبكة الجيوديزية الرئيسية من محطات ذرواتها نقاط جيوديزية رئيسية • ان اطوال اضلاع محطات الشبكة الرئيسية تتراوح بين 40 km. و 100 km. ومن هنا يتبين ان عدد النقاط الجيوديزية من الدرجة الاولى قليل نسبيا ، ما يسمح بتأمين وقت كاف لمخطف عمليات القياس والحساب للتوصل الى دقة كبيرة في تعيين احداثيات هذه النقاط . سوف لا نتعرض هنا الى القياسات والحسابات التي تتم على الاهليج اذ انها تخرج عن هذا الطهاج ، بل نكتفي بأن نقول انه اضافة الى القياسات الزاوية والطولية التي تتم لهذه الشبكة على سطح الارض فانه تقاس الاحداثيات الفلكية لعدد من النقاط (ونسبها بنقاط لاهلاس) ما يسمح بمعرفة انحرافات الشاقول والاستدلال عن شكل الجيوليد •

تكون نقاط الشبكة الرئيسية بعيدة بعضها عن بعض ولا تسمح برومية المناطق القريبة منها ، لذلك توضع شبكة ثانية تستند الى الشبكة الرئيسية وتحسب اعتبارا عنها ، نسبها بشبكة التثليث من الدرجة الثانية • بخاطر موقع كل نقطة من نقاط هذه الشبكة بطريقة تضمن معها رومية عدد كاف من نقاط الدرجة الاولى ونقاط الشبكة الثالثة التي تستند الى الشبكة الرئيسية والشبكة الثانية ، تتسراج اضلاع الشبكة الجيوديزية من الدرجة الثانية بين 15 km. و 25 km. أما اضلاع الشبكة الثالثة فتكون عادة بين 5 km. و 10 km. •

هذا يتم في كثير من الاحيان تعيين نقاط الشبكة الثالثة بطريقة التقاطع والتقيهم أو بطريقة التضليح الدقيقة (في الاراضي المنبسطة) •

واخيرا ، فاستنادا الى النقاط السابقة يمين عدد من النقاط

تشكل بمجموعها شبكة تتلخص رابعة تتوصل فيها الى الكثافة المطلوبة
الضرورية لاحتياجات المساحة ، ويتم تعيين نقاط الشبكة الرابعة
بطريقة التقويم والتقاطع أو بطريقة التضلع في الاراضي المنبسطة •
تجرى دوما قياسات فائضة في عمليات التلخيص ، فهـذ •
القياسات الفائضة تسمح من جهة باكتشاف اغلاط القياس والتخلص
منها ومن جهة ثانية تؤمن لنا تعديلا للقياسات مما يزيد في الدقة •
يتم التعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى الذى سشرح
في الفصل السادس ، كما اننا سشرح حساب وتعديل نقاط الدرجة
الرابعة المعنية بالتقاطع والتقويم في الفصل السابع ، وسنعين طريقة
تعديل احداثياتها وفق مبدأ المربعات الصغرى •

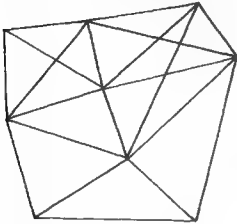
(4.2) — الشروط المفروضة على الشبكات الجيوديزية :

يجب ان تكون النقاط الجيوديزية جملة متجانسة ، أى ان تتجمع
كل نقطة بنفس الدقة • تعتمد هذه الدقة من جهة على دقة
القياسات ومن جهة ثانية على الاشكال الهندسية المشكلة من خطوط
الرصد والتي يجب ان تحقق خواصا لا بد منها للحصول على نتائج
مرضية •

من أهم هذه الخواص هو ان لا تقل زاوية من زوايا هذه الاشكال
عن حد معين يقدر هذا الحد الأدنى بـ 30° • أما اضلاع الاشكال
ف يجب ان تكون متساوية الطول تقريبا كلما امكن ذلك • ويمكن ان تكون
الشبكة موهلة من اشكال رباعية أو خماسية أو أشكال ذات نقطة مركزية
(شكل 4.2.1) •

ان وضع النقاط الجيوديزية على الطبيعة يتبع القواعد التالية :

- ١ - توضع نقاط الدرجة الاولى والثانية على قمم الجبال ، وهذا الشرط ضروري اذا اردنا اجرا رصد من كافة الاتجاهات



- لهذه النقاط .
٢ - أما نقاط الدرجة الثالثة فتوضع على التلال والنقاط التي يمكن منها رؤية نقاط الدرجة الاولى والثانية ثم رؤية عدد من نقاط الدرجة الرابعة .

٣ - بما اننا نستند بشكل عام الى نقاط (شكل 4.2.1)

الدرجة الرابعة للقيام بالاعمال المساحية فان وضعها يتبع الاحتياجات الطبوغرافية . وهي توضع عادة في المناطق السهلة .

هذا وصحى وضع نقاط الدرجة الثالثة والرابعة في المدن على المباني العامة والايراج والآذن واجراس الكنائس . . الخ .
(4.3) - عملية الاستطلاع أو التعرف على الطبيعة :

يتطلب تطبيق الشروط الواردة في الفقرة السابقة بحثا طويلا ودقيقا على سطح الارض وتسي هذه العملية بعملية الاستطلاع أو التعرف على الطبيعة ولها غاية أساسية هي التفتيش عن الاكبات العوجسودة لتأسيس شبكة تناسب الشروط المفروضة على الشبكات باحسن شكل وبطريقة اقتصادية .

تكون شبكة جيوديزية اقتصادية اذا كان عدد خطوط الرصد الضرورية اقل ما يمكن واذا كانت حجوم المنشآت التي ستؤسس لتجسيد النقاط اقل ما يمكن .

ان المفهوم الاقتصادي هذا يعقد عملية الاستطلاع ويتطلب بحثاً دقيقاً اذا اردنا ان نقلل من عدد خطوط الرصد ، اذ عليها اختيار خطوط الرصد جيداً لتحقيق شروط الاشكال الواردة في الفقرة السابقة .

ان عملية الاستطلاع تسبق كل عمليات القياس ويمكن تسهيلها بدراسة أولية على خريطة ان وجدت فغرض " مقاطع طولية بين ذروات خطوط الرصد نستطيع بواسطتها معرفة امكانية تحقيق الرصد على الطبيعة ، وفي عملية الدراسة الأولية يجب الاستفادة الى حد ما من عمليات التثقيف القديمة ان كانت موجودة ، وبعد الدراسة الأولية تظهر لنا عملية الاستطلاع الامكانيات التي لم نستطع ان نلمسها على الخريطة ، فاستنادا الى عملية الاستطلاع نستطيع ان نقرر حجم الاشارات التي ستوضع .

(4.4) — انشاء النقاط الجيوديزية والاشارات :

اذا راعينا الناحية الاقتصادية لتجسيد النقاط الجيوديزية عليها ان تؤسس اكبر عدد منها على الابهة العامة والابراج واجراس الكنائس والآذن ... الخ ، ولكن كثافة هذه المنشآت وتوزعها لا يسمحان باسناد الشبكات الجيوديزية اليها فقط ، بل يجب اعتبار نقاط ثانية من سطح الارض لتحقيق الشروط المشروحة في الفقرة (4.2) ، وفي هذه الحالة تجسد النقاط الجيوديزية بوضع اسطوانة من الفولاذ تسمى بالدليل في حفرة ذات عمق من 60^{سم} الى 100^{سم} يخمر الدليل في كمية من الاسمنت ذي سماكة تساوى ارتفاعه ، ويوضع فوقه طبقة من الرمل لحمايته (شكل 4.4.1) وفوق هذه الطبقة يركز حجر من الجرانيت أو من الكلس القاسي يسميه بالمرصد ، تكون قمته على شكل اسطوانة

أو كعب .

تعين النقطة الوسطية للمرصد بحفرة صغيرة أو صليب مركز المرصد بطريقة تكون فيها نقطة تقاطع الصليب أو الحفرة على شاقول الدليل .

ان ارتفاع المرصد يختلف

حسب درجة النقطة ويجب ان لا يقل عن 70^{cm} وتكون ابعاد قعته بحدود $40^{\text{cm}} \times 30^{\text{cm}}$ ، ويستعاض عن

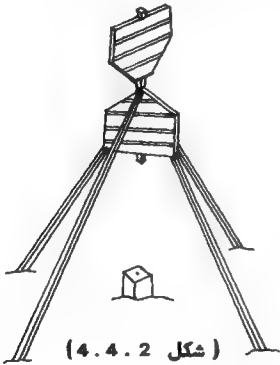
الدليل والمرصد في الاراضي الصخرية القاسية التي يصعب فيها الحفر بؤدد من الحديد اسطواني طوله من 50^{cm} الى 100^{cm} ومقطعه بين 25^{cm} و 35^{cm} . يخرس هذا الوعد الى

حافة الارض .

(شكل 4.4.1)

لتسهيل عملية التفتيش عن الدليل عدد ضباع المرصد يمين موقعه اعتبارا من ثلاث نقاط قريبة منه وثانية على الطبقة ووضع لكل دليل مخطط صغير يبين وضعه بالنسبة للنقاط الثلاث ، ويشمل هذا المخطط اوصاف الدليل ، هذا وبالنسبة للنقاط الرئيسية غالبا ما يبنى فوق المرصد عمود من الحجر او البنتون ذى قاعدة مربعة علوية ابعادها بحدود 50^{cm} وذلك لوضع جهات القياس عليها ، ويكون العمود مثقوبا بطريقة تسمح بتركيز الجهاز على شاقولية النقطة وتثبت الجهاز ، فهنا لاستعمل ثلاثة ارجل لتركيز الجهاز وهذا انصت وادق .

توضع اشارات على النقاط الجيوديزية وخاصة على نقاط الشبكة الرئيسية ونقاط الشبكة الثانية ، لتتمكن من رصدها من بعيد ، ويجب ان تكون الاشارات ذات اشكال هندسية بسيطة لها محور تناظر شاقولي يمر من شاقول الدليل ، يسمي القسم العلوى المخصص للرصد بالعمرا • (شكل 4.4.2)



تكون الاشارات من الخشب او من الحديد ، ويجب ان يكون ارتفاعها وحجمها متناسبا مع الطول الوسطي لخطوط الرصد بحيث ترى في ساحة النظارة خيال الاشارة اكبر بقليل من خطوط المحكم .
يكون الافق المرئي في بعض المناطق المستوية محدودا بهضمة

كيلومترات ، ففي هذه الحالة يجب وضع اشارات مرتفعة جدا تحمل العمرا ، وفي بعض الاحيان لا يكفي وضع العمرا فحسب بل يجب اجراء القياسات ايضا في نقطة مرتفعة ، لذلك يؤسس حامل مرتفع ، وهذا الحامل عبارة عن هيكل خشبي أو حديدي مزود بمسطبة في اعلاه لوضع الجهاز واجراء القياسات •

الفصل الخامس

التسوية الهندسية الدقيقة

(5.1) — تعريف التسوية الهندسية الدقيقة :

نطلق اسم التسوية الهندسية على التسوية المباشرة عند تطبيق طرق خاصة واتخاذ احتياطات واجراءات تحقيقات بغية الحصول على ارتفاعات دقيقة للنقاط من سطح الارض . فمن مهام الجيوديزيا تعيين ارتفاعات عدد من النقاط تشكل الهيكل الاساسي للمساحة الارتطاعية . أضف الى ان هنالك عددا كبيرا من الاعمال تتطلب معرفة الارتفاعات بدقة كبيرة كقياس تغيرات السدود وتركيز القواعد للاجهزة الميكانيكية وقياس تغيرات القشرة الارضية ٠٠٠ الخ .

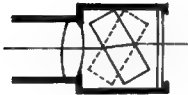
تتميز التسوية الهندسية بما يلي :

- ١ — استخدام جهاز تسوية دقيق
- ٢ — استخدام ميرات من الانظار
- ٣ — تطبيق طريقة الرصد المتساوي ويجب تحقيقها بدقة $\pm 1^m$ بالنسبة لخطوط الرصد ذات الطول 60^m .
- ٤ — اتباع طرق خاصة للتحقيق
- ٥ — حين اللجوء الى طريقة السهر يجب ان لا تتجاوز الاضلاع 60^m
- ٦ — اجراء قياسات فائضة من شأنها تأمين تحقيق غير مباشر للقياسات واجراء تعديل لها .
- ٧ — تعديل القياسات وفق مبدأ المربعات الصغرى (الفصل السادس)

(5.2) — اجهزة التسوية الهندسية الدقيقة :

ان اجهزة التسوية الهندسية الدقيقة شبيهة من ناحية التركيب

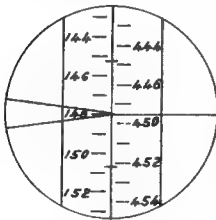
بأجهزة التسمية المباشرة ومن بين أجهزة التسمية المباشرة نذكر ليفوا :
(Niveau Wild N 3) • ان المميز في هذا الجهاز هو انه مزود بميكرومتر ضوئي مؤلف بشكل رئيسي من صفحة متوازية الوجوه
(شكل 5.2.1) موضوعة امام جسمية النظارة



ومرتبطة بمحور أفقي يمكنها الدوران حوله •
يتم هذا الدوران بتدوير اسطوانة
مدرجة وهذا من شأنه احداث انتقال
ضائقي لخيال العمرا فيمكننا بهذا الدوران
تحقيق تطابق بين تقسيم صحيح على العمرا
وخط المعكم الأفقي ونحاس هذا الانتقال

(شكل 5.2.1)

على الاسطوانة المدرجة • ان النظارة مرتبطة بزلزلية حلقيية يعكس
طرفا الفتحة بواسطة جملة ضوئية (شكل 5.2.3) فيحدد توجيه النظارة



الى العمرا ووضع فتحة الزلزلية بين حديها
بحرك الاسطوانة المدرجة الى ان يتسم
انطباق خط المعكم مع تدريج من تدريجات
العمرا ثم نقرأ على العمرا ونقرأ على الاسطوانة
المدرجة مقدار الانتقال •

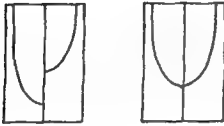
بهذه الطريقة يمكن من اجراء تعيين

دقيق لقيمة اجزاء تقسيمات العمرا التي تخفى
بالتسمية الهندسية بالتقدير •

(شكل 5.2.2)

ان سعة انتقال شعاع الرصد حين تدوير الميكرومتر هي $10''$
تتمكن بذلك من اجراء قراءة على الميكرومتر من اجل أى وضع لخط الرصد
نفجرى القراءات على العمرا بدقة $\frac{1}{10}$ من المليمتر •

ان الجهاز مزود بزلبكية كروية لتأمين شاقولية المحور الرئيسي
أما تكبير النظارة فهو 42 ، وأما المحكم فيحوى على خطين ستاديمترين
يعطيان ثابتة ضرب ستاديمترية (100) وقد عوض عن نصف الخط
الافقي للمحكم بخطين متناظرين بالنسبة للنصف الثاني من الخط
الافقي (شكل 5.2.2) وهما يسمحان بإحاطة تقسيم من تقسيمات
الميرا .



تستخدم مع أجهزة التسمية
الدقيقة مبرات من الانظار طول كل
واحدة ثلاثة امتار مoulغة من قطعة
واحدة تحفر تدريجات الميرا على
شريط من الانظار يوضع ضمن هيكل
معدني أو خشبي بطريقة لا تؤثر

(شكل 5.2.3)

على الشريط تغيرات الهيكل تحت تأثير الرطوبة والحرارة .

يحمل شريط الانظار على طرفيه تدريجات ، وكل تدريج من طرف
يبعد عن تدريج من الطرف الاخر بقيمة ثابتة ، فلدينا مقياسان على
كل طرف من الميرا وغاية ذلك إمكانية إجراء قراءتين على الميرا لحذف
اغلاط القراءة . .

يسمى الميرا من هذا النوع بالميرا ذات المقياسين . وفي المبرات
الانظار (Wild) كل تدريج من طرف يبعد بمقدار 55'' عن تدريج
من الطرف الاخر (شكل 5.2.2) بحيث ان يكون فرق القراءتين على
كل من المقياسين (55'' ، 301'') يحدود اخطاء القراءة .

تركز الميرا شاقوليا بواسطة زلبكية كروية ، وتستخدم حوامل
لتأمين ثبات شاقوليتها أثناء القياس ، كما تركز على قواعد خاصة

(تسمى سوكل Socle) (شكل 5.2.4)

تغرس بالأرض ، لضمان ثبات المرا
حين اجراء القياسات .

(5.3) — شبكة التسوية العامة :

ان طريقة التسوية الهندسية

الدقيقة ، لاتصلح لتعيين ارتفاعات

النقاط الجيوديزية لان هذه النقاط

تكون موضوعة بشكل عام على قمم الجبال

والتلال ولذلك تُعَيَّن ارتفاعاتها

(شكل 5.2.4)

بطريقة التسوية غير المباشرة وباد خال تصحيحات كروية الأرض وانكسار

الاشعة ، يحدد تطبيق التسوية الهندسية الدقيقة لتعيين ارتفاعات

نقاط موضوعة في امكنة سهلة وبشكل عام على طول خطوط المواصلات .

تؤلف هذه النقاط بمجموعها شبكة نسميها بشبكة التسوية

العامة للبلاد ، فتؤسس شبكة اساسية اولى من نقاط التسوية تسم

شبكة ثابتة تستند اليها ثم شبكة ثالثة وهكذا الى ان نتوصل الى

تعيين عدد كاف من النقاط ذات الارتفاعات المعلومة والتي تخدم

كهيكل اساسي وكمراجع للارتفاعات في المساحة كقطب منها ونجرى

قياسات لارتفاعات النقاط في الاعمال المساحية ثم نسكر على نقاط من

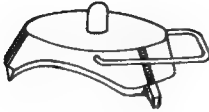
الشبكة ، فنتمكن من تحقيق خلو الارتفاعات في المساحة من الانغلاق

كما نستطيع تعديل القياسات لزيادة دقة الاعمال .

تجسد نقاط التسوية العامة على الطبيعة وتتبع طريقة السحير

لتعيين ارتفاعاتها . ان مختلف المضلعات الواصلة بين هذه النقاط

تسمى بالشبكة ، ونطلق اسم العقدة على النقطة المشتركة لعدة



مضلعات ، فارتفاع عقدة يكون تابعاً للمسار ، وللحصول على ارتفاع وحيد للعقد في شبكة من الضروري ان تخضع القياسات لتعديل ويتم هذا التعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى (الفصل السادس)
وسنبين في الفصل السابع كيفية اجراء هذا التعديل .

ان الارتفاعات المعينة لنقاط الشبكة هي بالنسبة للمستوى الوسطي للبحار لكل دولة يحدها بحرأى منسوبة الى سطح البحر في حالة السكون دون اعتبار ظاهرة المد والجزر يسمى هذا السطح بـ سطح السهوية المفر .

يتم تعيينه باجراء قياسات لمعرفة تغيرات مستوى البحر في منطقة ثانية جيولوجيا وذلك بواسطة جهاز يدعى (راسم المد والجزر
• (Marégraphe

(5.4) — التنفيذ العملي لمعطيات التسوية الدقيقة لشبكة :

ان من شروط التسوية الهندسية الدقيقة اجراء عمليات القياس على طول الخطوط الحديدية وطرق المواصلات وبشكل عام في المناطق السهلة المنبسطة للحصول على دقة في القياسات ، وتلعب طبيعة الارض التي يجري عليها العمل وبشكل عام ثباتها دوراً هاماً في دقة التسوية الهندسية .

تجسد نقاط التسوية الرئيسية بدلائل من الحديد ، مثبتة بالصخر أو بالاناشآت الثابتة كالجسور والابنية العامة ، أما بالنسبة لنقاط التسوية الثانوية فتجسد كل منها بدليل او برشم من الحديد مثبت في السطوح المستوية للانشآت الثابتة أو على الصخور وتكون قمة البرشم على شكل نصف كرة .

بعد اختيار موقع كل نقطة وتجسيدها وترقم معين موقعها
الكملو مترى ويرسم لها كروكي يوضح مكانها بالنسبة للأشياء الثابتة
والقريبة .

تعين ارتفاعات النقاط الرئيسية بعطيات سهر مطلق ، ومجموعة
المضلعات الواصلة بين هذه النقاط تدعى بالشبكة الرئيسية . استنادا
الى هذه الشبكة تعين بطريقة السهر ايضا نقاط تسوية من الدرجة
الثانية وهكذا .

لاجراء القياسات بشكل دقيق تجسد ذروات مضلع واصل بين
نقطتي تسوية باوتاد من الخشب تثبت جيدا بالارض ويغرس فوق كل
مها مسار ذو قمة نصف كروية تركز عليها العمرا أو تستخدم قواعد للعمرا
تغرس بالارض ، ويجب العمل على تثبيت ذروات المضلع جيدا بالارض
لضمان ثبات العمرا عليها أثناء اجراء القياسات .

تستخدم طريقة الرصد المتساوى لاجراء قياسات التسوية أى
يوضع جهاز التسوية في منتصف المسافة بين نقطة خلفية ونقطة امامية .
اذ بذلك يحذف تأثير كروية الارض وتأثير انكسار الاشعة وخطأ التوجيه
الشافولي (عدم ضبط الزنبيقية بالنسبة للمحور الضوئي) . ويمكن
تحقيق المنتصف بواسطة شريط أو حبل .

من الاخطاء النظامية التي تعترض التسوية الهندسية الدقيقة
هو الخطأ الناتج عن اتجاه السير ومن اسبابه انخفاض التربة تحت
تأثير وزن العمرا المستندة على القاعدة أو الوتد في الفترة الزمنية
التي تعضي بين قراءة امامية على هذه العمرا ثم قراءة خلفية عليها .
لذلك يجب اجراء السير باتجاهين فستستخدم طريقة الذهاب
والاياب بين كل دلهلين متتاليين ، فهذه الطريقة تمكن من مقارنة

نتائج القياس لكل ضلع من اضلاع السهر واكتشاف الاغلاط . فاذا كان الفرق بين الذهاب والاياب مضربا باخطاء القياسات تعتبر عددًا — المتوسطه بين الذهاب والاياب كقيمة لفرق الارتفاع القياس . يمكننا ان نستخدم ايضا طريقة كولسكي (Cholesky) المسماة ايضا بطريقة السهر المضاعف ، وفيها يجرى تعيين فرق الارتفاع بين دليلايين متتاليين باجراء قياسات حسب سهرين قريبين من بعضهما . كل سهر له ذروات خاصة يلتقي هذان السهران في كل دليل . تجرى القياسات حسب هذين السهرين وذلك باستخدام اربع ميراث .

هذا ويجب اجراء تحقيقات مستمرة خلال القياسات فنجرى قراءة على كل قياس حين استخدام ميراث الانظار ، كما تجرى قراءتهم حسب الخطئين الستاديمترين حين استخدام المرا العادية ، فيجب ان تكون القراءتان وفق الخطئين الستاديمترين متناظرتين بالنسبة للقراءة وفق الخط الوسطي الاقبي للمعكم .

يمكن بطرق التحقيق هذه ، من الحصول على نتائج دقيقة .

ان حساب فرق الارتفاع القياس بين دليلين يتم بسهولة باعتبار كافة القياسات وتأخذ المتوسطات لحساب ارتفاع العقد في شبكة . تخضع الشبكة لتعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى وتشرح طسوق تعديل الارتفاعات لشبكة تسوية دقيقة في الفصل السابع .

(5.5) — دقة التسوية الهندسية الدقيقة :

تتميز دقة التسوية الهندسية الدقيقة بالخطأ المتوسط التربيع لفرق الارتفاع القياس بين نقطتين البعد بينهما كيلو متر واحد ، ونسميه بالخطأ المتوسط التربيع الكيلومترى ، يحلل هذا الخطأ الى جزئين

الاول عرضي e_o ويتبع قانون التوزيع النظامي لغوص والثاني نظامي e_s وسببه الرئيسي اتجاه السور . تعتبر بشكل عام القيم التالية ل e_o و e_s :

e_s^{min}	e_o^{min}	
0.2	0.4	التسوية الدقيقة من الدرجة الاولى
0.2	0.5	التسوية الدقيقة من الدرجة الثانية
1.5	3.0	التسوية الدقيقة من الدرجة الثالثة والرابعة

يمكننا ان نبرهن بسهولة ان الخطأ المتوسط التوسيع على فرق الارتفاع بين نقطتين البعد بينهما L يعطى بالعلاقة التالية :

$$E = e_o \sqrt{L} + e_s L \quad (5.5.1)$$

يمكن الخطأ الاعظمي أى حد التساهل

$$E_{max} = 2.5 E$$

أو

$$E_{max} = 3 E$$

الفصل السادس

تقدير المجاهيل وفق مبدأ المبرعات الصغرى

(6.1) — تصنيف القياسات :

يمكننا تصنيف القياسات في أربعة زمر :

أ — القياسات المباشرة : وهي القياسات التي تجرى مباشرة على

العنصر المراد تعيينه ، فنسمي قياسا مباشرا كل تعيين

لعنصر ما بمقارنته مباشرة مع وحدة للقياس وباجراء قراءة على

اجهزة القياس .

ب — القياسات غير المباشرة أو بالواسطة : وهي القياسات التي

تجرى على كمية أو عدة كميات متعلقة بعنصر أو عدة عناصر نريد

تعيينها ولا نستطيع قياسها قياسا مباشرا لاستحالة ذلك ، مثلا

لتعيين احداثيات نقطة بالجملة العامة للبلاد او تعيين نصفي

قطري الاهليج الارضي ، تلجأ الى قياسات مرتبطة مع المجاهيل

بعلاقات تم تعيين حسابيا هذه المجاهيل ، فالمجاهيل تابعة

لقياسات ونقول عن المجاهيل اننا ستعيينها بالواسطة او بطريقة

غير مباشرة .

ج — القياسات الشرطية : وهي القياسات التي يجب ان تحقق

شروطا معينة كنظرية هندسية أو قانون منطقي مثلا يجب ان

تكون مجموع زوايا مثلث يساوي 200° فاذا قسنا الزوايا الثلاث

لمثلث فعلى القياسات ان تحقق هذا الشرط ، وهذا الشرط

موجود بمجرد ذكرنا ان الزوايا الثلاث هي زوايا مثلث .

لدينا هنا اذن شروط أو علاقات تربط بين مجاهيل ستعيين

كلها بقياسات ، وهذه الشروط موجودة سواء عرفت المجاهيل أم لم تعين إلا أنه ان تم قياس هذه المجاهيل فحسب اخضاع القياسات لتصحيحات بغية تحقيق الشروط الموجودة .
 نسي هذه القياسات بالقياسات الشرطية .

د — القياسات الشرطية المرتبطة بمجاهيل : وهي القياسات التي يجب ان تحقق شروطا معينة وهذه الشروط تحوى على مجاهيل لا يمكن قياسها الا بالواسطة . فلدينا علاقات تضم عددا من المجاهيل بعضها يمكن تعيينه بقياسات والبعض الاخر سيعين من هذه العلاقات أو الشروط واستنادا الى القياسات التي تمت .

مثلا لنفرض اننا سنعين معادلة مستقيم في المستوى ، يتعين المستقيم في المستوى فيها اذا علمنا ميله m عن المحور ox وترتيب نقطة تقاطعه مع المحور oy ولكن p . ولدينا n نقطة سير بها المستقيم يمكننا قياس احداثيات النقاط ، فلدينا هنا مجاهيل يمكن قياسها وهي احداثيات n نقطة ويجب ان تحقق معادلة المستقيم ولدينا مجهولين هما m و p سيعينان استنادا الى القياسات أى بالواسطة أو بطريقة غير مباشرة .

سنعرف فيما يلي كل زمرة من هذه القياسات بمجموعة من العلاقات الخطية تسمى نموذج رياضي وسنحاول بعد ذلك ايجاد نموذج عام يضم الحالات الاربعة السابقة .

(6.2) — النموذج الرياضي للقياسات المباشرة :

لدينا هنا عنصر واحد مجهول θ يمكن تعيينه بقياسات

مباشرة • ان قياسا واحدا لهذا العنصر يكفي لتعيينه الا انه بشكل عام لا يكفي بقياس واحد بل نجري n قياسا وذلك لتحقيق غرضين اساسيين ، الاول لتحقيق خلو القياسات من الاغلاط واستبعاد ما حين وجودها ، والثاني هو اختيار من مجموعة القياسات قيمة هي اديق من كل قياس ان تم تقديرها وفق اسس علم الاحصاء والاحتضالات •

لذلك سنفترض انه لتعيين β سنجرى n قياسا وسنفرض ان القيم النظرية للقياسات هي (y_1, y_2, \dots, y_n) • بما ان القياس مباشر فيمكننا ان نكتب المعادلات التالية :

$$\begin{array}{l} \beta = y_1 \\ \beta = y_2 \\ \vdots \\ \beta = y_n \end{array} \quad (6.2.1)$$

لنحاول كتابة هذه المعادلات بشكل متريسي باستخدام

المصفوفات •

لندخل الرمز التالية :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (مصفوفة الشعاع في البعد و } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ (النوبي يمكن قياسه) الاطال وهي ثابتة)} \quad (6.2.2)$$

$$\beta = (\beta) \text{ (مصفوفة تحوى عنصر واحد هو المجهول)}$$

يمكننا عدئذ كتابة جملة العلاقات (6.2.1) على الشكل

$$B \beta = Y \quad (6.2.3)$$

وهو النموذج الرياضي القياسي للقياسات بالواسطة أو غير العباشرة حيث β هو شعاع المجاهيل غير الممكن قياسها وهو في الفراغ p و γ شعاع المجاهيل الممكن قياسها وهو في الفراغ n .
 سنفرض ان $n \geq p$ اذ لا يمكن تعيين اية قيمة للمجاهيل
 • $p > n$ اذا كان $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$

كما سنفرض ان المعادلات (6.3.1) مستقلة وهذا يعود الى اعتبار المصفوفة B بأنها ذات رتبة اعظمية ، وبما ان $n \geq p$ فيجب ان تكون رتبها p ونكتب :

$$r(B) = p \quad (6.3.4)$$

(6.4) — النموذج الرياضي للقياسات الشرطية :

لنعتبر n معادلة خطية بـ m مجهول (y_1, y_2, \dots, y_m) :

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m + l_1 &= 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m + l_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m + l_n &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

حيث $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm})$ اعداد معطاة (l_1, l_2, \dots, l_n)

ثوابت معطاة .

أما (y_1, y_2, \dots, y_m) فهي مجاهيل يمكن قياسها .

لندخل الرموز القياسية التالية :

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (6.4.2)$$

فيمكننا ان نكتب جملة المعادلة (6.4.2) على الشكل :

$$AY + L = 0 \quad (6.4.3)$$

وهو النموذج الرياضي للقياسات الشرطية حيث L شعاع مجهول في الفراغ m ولكن يمكن قياسه .

سنفترض ان $n < m$ اذ لا معنى لاجراء قياسات للمجاهيل

ان كانت $n \gg m$ فهي تتعين بحل المعادلات .

سنفترض ايضا ان جملة المعادلات الخطية (6.4.1) مستقلة

أي ان المصفوفة A ذات رتبة اعظمية وما ان $n < m$ فيجب ان تكون رتبة A :

$$r(A) = n \quad (6.4.4)$$

(6.5) — النموذج الرياضي للقياسات الشرطية مع مجاهيل :

لنعتبر m مجهولا يمكن قياسه (y_1, y_2, \dots, y_m) و p وسيطا مجهولا لا يمكن قياسه $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ ، ولنفرض انها مرتبطة ببعضها بـ n معادلة خطية ، أي :

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m + \ell_1 &= b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \dots + b_{1p}\beta_p \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m + \ell_2 &= b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \dots + b_{2p}\beta_p \\ &\vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m + \ell_n &= b_{n1}\beta_1 + b_{n2}\beta_2 + \dots + b_{np}\beta_p \end{aligned}$$

(6.5.1)

حيث $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm})$ و $(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{np})$ اعداد معطاة .
و $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ ثوابت معطاة .

بادخال الرمز الترمسية (6.3.2) و (6.4.2) يمكننا كتابة

جملة هذه المعادلات على الشكل :

$$AY + L = B\beta \quad (6.5.2)$$

حيث β شعاع في الفراغ m يمكن قياسه و β شعاع في

الفراغ p لا يمكن قياسه .

سنفترض ان $p \leq n < m$ وان المصفوفتين A و B ذات

رتبة أعظمية أى ان المعادلات (6.5.1) مستقلة ، فلدينا :

$$r(B) = p \quad r(A) = n \quad (6.5.3)$$

ان (6.5.2) يعرف لنا النموذج الرياضي للقياسات الشرطية

المرتبطة بمجاهيل .

(6.6) - النموذج الرياضي الخطي العام :

نختار كنموذج رياضي خطي عام لكل الاشكال الاربعة السابقة

نموذج القياسات الشرطية مع مجاهيل (6.5.2) وسيتبين ان

يمكننا استنتاج النماذج الثلاثة الباقية كحالات خاصة .

لنذكر :

$$AY + L = B\beta \quad (6.5.2)$$

حيث β شعاع في الفراغ m يمكن قياسه ، β شعاع في

الفراغ p لا يمكن قياسه .

A و B مصفوفتي امثال معطاة $A_{(n,m)}$ و $r(A) = n$

$B_{(n,p)}$ و $r(B) = p$

L شعاع ثابت في الفراغ n

واعتبارا من هذا النموذج نحصل على :

١ - نموذج القياسات الشرطية (6.4.3) بوضع :

$$\rho = 0 \quad B = 0 \quad (6.6.1)$$

٢ - نموذج القياسات بالواسطة أو غير المباشرة (6.3.3) بوضع

$$m = n \quad A = I_{(n,n)} \quad (6.6.2)$$

حيث $I_{(n,n)}$ المصفوفة الاحادية من الدرجة n

٣ - نموذج القياسات المباشرة (6.2.3) بوضع

$$m = n, \quad L = 0, \quad \rho = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.3)$$

$$A = I_{(n,n)}$$

كما انه يمكننا ان نستنتج نموذج القياسات المباشرة (6.2.3)

من نموذج القياسات بالواسطة بوضع

$$\rho = 1, \quad L = 0, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.4)$$

هنا أننا نرى أن النموذج (6.5.2) عام فيكفي اذن دراسة

واستنتاج القوانين الخاصة به لتقدير المجاهيل ثم استخراج الحالات

الخاصة لبقية اشكال القياسات وذلك بأخذ بعين الاعتبار الشروط

(6.6.1) و (6.6.2) و (6.6.3) .

(6.7) - ادخال القياسات ومبدأ المربعات الصغرى :

لنعتبر النموذج الرياضي العام :

$$AY + L = B\beta \quad (6.5.2)$$

نعلم أن Y هو شعاع في الفراغ m وهو مجهول ولكن يمكن

قياسه أي قياس مركباته . فلنفرض ان قياسات مركبات Y هي

: X المتقة بالشعاع (x_1, x_2, \dots, x_m)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (6.7.1)$$

ولنفرض ان هذه القياسات مستقلة ولكنها ليست بنفس الدقة بل ذات أوزان (g_1, g_2, \dots, g_m) ولندكر ان وزن قياس يمثل أهميته النسبية بالنسبة لبقية القياسات .

ان القياسات (x_1, x_2, \dots, x_m) تحمل اخطاء عرضية مجهولة .
لنرمز لهذه الاخطاء بـ (v_1, v_2, \dots, v_m) والتي يمكن اعتبارها مركبات شعاع V

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (6.7.2)$$

فيمكننا ان نكتب :

$$Y = X + V \quad (6.7.3)$$

أو

$$V = Y - X \quad (6.7.4)$$

ان المعادلة المتريسية (6.5.2) تمثل n معادلة بـ $(m+p)$ مجهول ولدينا $m+p > n$ فعدد المجاهيل اكبر من عدد المعادلات .
فرياضيا لدينا حلول لانهاية حيث انه لدينا $(m+p - n)$ حلا مستقلا أى يمكننا اختيار $(m+p - n)$ مجهول .
الا ان الشعاع Y قد قيمت مركباته أو ان X هو قياس Y فاذا عوضنا في (6.5.2) نجد :

$$A X + L = B \beta \quad (6.7.5)$$

وهذه المعادلة الترسية تمثل n معادلة بـ p مجهول ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$) لكن $p \leq n$ أى أنه بشكل عام ، عدد المعادلات أكثر من عدد المجهول ، هذا وقد سبق أن ذكرنا أن القياسات تحمل اخطاء ، ومن هنا نستنتج انه لا يمكن ايجاد قيم للشعاع β المجهول بشكل تتحقق فيه كل المعادلات (6.7.5) .

وهنا نتساءل عن الحل الأكثر احتمالا لـ y و β أى بتعبير اداق نتساءل : وفق أى مبدأ يمكننا اختيار شعاع \hat{y} يمثل مقدراً *estimator* (*estimateur*) للشعاع المجهول y والمعين بالشعاع المقاس X . يجب على الشعاع المقدّر \hat{y} أن يحقق المعادلة الترسية (6.5.2) . لكن ادخال المقدّر \hat{y} في (6.5.2) سيؤدي الى تعيين شعاع مقدّر $\hat{\beta}$ للشعاع β . وعلى هذا الاساس يمكننا ان نكتب (6.7.5) بادخال هذين

$$A \hat{y} + L = B \hat{\beta} \quad \text{المقدّرين :} \quad (6.7.6)$$

وبادخال \hat{y} عوضاً عن y في (6.7.4) سندخل على مقدّر الشعاع الاخطاء لا على شعاع الاخطاء الحقيقية أى :

$$\hat{v} = \hat{y} - X \quad (6.7.7)$$

وعلينا الان اتباع مبدأ لتقدير \hat{y} و $\hat{\beta}$ المحققين لـ (6.7.6) يمكننا اتباع الطريقة الأكثر تشابهاً (*maximum likelihood*) ، *maximum de vraisemblance* ، لاجراء هذا التقدير وهي طريقة معروفة في علم الاحتمالات والاحصاء والتي نشتق منها مبدأ المربعات الصغرى . وسنقبل هنا هذا المبدأ بدون برهان .

ان مبدأ المربعات الصغرى ينع على اختبار المقدّر \hat{Y} بشكل
يصبح فيه التابع التالي اصغرياً :

$$\psi = g_1 \hat{v}_1^2 + g_2 \hat{v}_2^2 + \dots + g_m \hat{v}_m^2 = \text{minimum} \quad (6.7.8)$$

حيث $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_m)$ هي مقدرات الاخطاء وهي
مركبات الشعاع \hat{V}
ان الشكل (6.7.8) هو شكل تربيعي ولوضعه بشكل تربيعي
للعرف المصفوفة القطرية للوزان :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_m \end{pmatrix} \quad (6.7.9)$$

سنرمز فيها يلي لمقول مصفوفة بكتابة حرف T فوقها فعلاً C^T
يمثل مقول المصفوفة C

يمكننا كتابة الشكل التربيعي (6.7.8) باستخدام المصفوفات

كما يلي :

$$\psi = \hat{V}^T G V \quad (6.7.10)$$

وبادخال (6.7.7) نكتب العلاقة الأخيرة على الشكل :

$$\psi = (\hat{Y} - X)^T G (\hat{Y} - X) \quad (6.7.11)$$

نلاحظ ان ψ تابع للشعاع \hat{Y} أى تابع لـ m مجهول $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m)$
(6.8) — حساب المقدّرات :

سحسب الان المقدّرين \hat{Y} و $\hat{\beta}$ بتطبيق مبدأ المربعات
الصغرى أى بطريقة يصبح فيها التابع :

$$\psi \cdot (\hat{Y} - X)^T G (\hat{Y} - X)$$

(6.7.11)

اصغرها على أن يتحقق النموذج

$$A \hat{Y} + L = B \hat{\beta}$$

(6.7.6)

و \hat{Y} تابع لـ m مجهول ($\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m$) ولكن هذه المجهول غير مستقلة بل عليها تحقيق جملة المعادلات (6.7.6) ضمن اطار نهاية مرتبطة (لاحظ الطوق)، لذلك سنستعين بطريقة مضارب لاجرانج (Lagrange) فنعرف الشعاع :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad (6.8.1)$$

حيث عدد مركباته n بعدد المعادلات (6.7.6) وهذه

الامثال هي مضارب لاجرانج .

ثم نعتبر التابع :

$$\Omega = (\hat{Y} - X)^T G (Y - X) - 2 K^T (A \hat{Y} + L - B \hat{\beta})$$

(6.8.2)

الذي سنجعله اصغرها (راجع الطوق) . ان المجهول هي

$\hat{Y}, \hat{\beta}, K$ ، فلنفاضل Ω بالنسبة لهذه المجهول . فنجد :

$$d\Omega = d\hat{Y}^T G (\hat{Y} - X) + (\hat{Y} - X)^T G d\hat{Y} - 2 K^T (A d\hat{Y} - B d\hat{\beta}) \\ - 2 dK^T (A \hat{Y} + L - B \hat{\beta})$$

أو

$$d\Omega = d\hat{Y}^T G (\hat{Y} - X) + (\hat{Y} - X)^T G d\hat{Y} - {}_2 K^T A d\hat{Y} \\ + {}_2 K^T B d\hat{\beta} - {}_2 dK^T (A\hat{Y} + L - B\hat{\beta}) \quad (6.8.3)$$

بما أن $d\Omega$ هو عنصر واحد فان كل حد من الطرف الثاني في (6.8.3) يمثل عنصرا واحدا وهذا ما يمكن تحقيقه بسهولة فممكننا اذن ان نعوף أى حد من الطرف الثاني بمقلوبه فلدينا :

$$d\hat{Y}^T G (\hat{Y} - X) = [d\hat{Y}^T G (\hat{Y} - X)]^T = (\hat{Y} - X)^T G d\hat{Y} \quad (6.8.4)$$

حيث G هي مصفوفة قطرية (متناظرة) .

بادخال (6.8.4) في (6.8.3) نجد :

$$d\Omega = (\hat{Y} - X)^T G d\hat{Y} + (\hat{Y} - X)^T G d\hat{Y} - {}_2 K^T A d\hat{Y} \\ + {}_2 K^T B d\hat{\beta} - {}_2 dK^T (A\hat{Y} + L - B\hat{\beta}) \quad \text{أو}$$

$$d\Omega = {}_2 [(\hat{Y} - X)^T G - K^T A] d\hat{Y} + {}_2 K^T B d\hat{\beta} \\ - {}_2 dK^T (A\hat{Y} + L - B\hat{\beta})$$

(6.8.5)

ونحصل على القيمة الصغرى لـ $d\Omega$ عندما $d\Omega = 0$ مهما كانت قيم التزايدات $d\hat{Y}$, $d\hat{\beta}$, dK (راجع الطبق) . أى عندما تنعدم التعابير التالية :

$$(\hat{Y} - X)^T G - K^T A = 0 \quad (6.8.6)$$

$$K^T B = 0 \quad (6.8.7)$$

$$A\hat{Y} + L - B\hat{\beta} = 0 \quad (6.8.8)$$

• يجب إيجاد قيم المقدَّرين \hat{Y} و $\hat{\beta}$ التي تحقق (6.8.6) .
 (6.8.7) ، (6.8.8) نلاحظ أن هذه القيم ستحقق العلاقة
 المتريسية (6.7.6) أي النموذج (6.5.2) إذا أن العلاقة
 (6.8.8) ليست إلا العلاقة (6.7.6) •

بأخذ مَقُول طرفي العلاقة (6.8.6) نجد :

$$G(\hat{Y} - X) - A^T K = 0 \quad \text{أى}$$

$$\hat{Y} - X = G^{-1} A^T K$$

حيث G مصفوفة قطعية نظامية •

$$\hat{Y} = X + G^{-1} A^T K \quad \text{وطه} \quad (6.8.9)$$

بإدخال (6.8.9) في (6.8.8) نجد :

$$A[X + G^{-1} A^T K] + L - B\hat{\beta} = 0 \quad \text{وطه}$$

$$(A G^{-1} A^T) K + AX + L - B\hat{\beta} = 0$$

$$\boxed{(A G^{-1} A^T) K = B\hat{\beta} - (AX + L)} \quad \text{أو} \quad (6.8.10)$$

$$\boxed{M = A G^{-1} A^T} \quad \text{للضغ} \quad (6.8.11)$$

نلاحظ أن المصفوفة M مربعة ودرجتها n إذ :

$M_{n,n} = (A)_{n,m} (G)_{m,m} (A^T)_{m,n}$
 أن رتبة M هي من رتبة A لأن G مصفوفة نظامية و $n < m$
 وقد سبق أن ذكر أن رتبة A هي اعظمية أى $r(A) = n$ من هنا

نستخرج ان رتبة M هي n فالمصفوفة M نظامية .

نكتب (6.8.10) باستعمال الرمز (6.8.11)

$$MK = B\hat{\beta} - (AX + L)$$

$$K = M^{-1}[B\hat{\beta} - (AX + L)] \quad \text{وطه} \quad (6.8.12)$$

لنأخذ الآن مقلول الطرفين في العلاقة (6.8.7) فنجد :

$$B^T K = 0$$

وبادخال تعبير K من (6.8.12) نجد :

$$B^T[M^{-1}B\hat{\beta} - M^{-1}(AX + L)] = 0$$

$$(B^T M^{-1} B) \hat{\beta} = B^T M^{-1} (AX + L) \quad \text{أو} \quad (6.8.13)$$

$$N = B^T M^{-1} B \quad \text{لنضع} \quad (6.8.14)$$

نلاحظ ان N مصفوفة مربعة درجتها p اذ $N_{p,p} = (B^T)_{p,p} (M^{-1})_{n,n} (B)_{n,p}$

ثم ان هذه المصفوفة هي من رتبة المصفوفة B اذ ان M

نظامية ولكن سبق ان شرطنا ان رتبة B هي اعظمية أى $r(B) = p$

فرتبة المصفوفة N هي p أى انها نظامية :

تصبح العلاقة (6.8.13) بادخال الرمز (6.8.14) :

$$N\hat{\beta} = B^T M^{-1} (AX + L)$$

$$\hat{\beta} = N^{-1} B^T M^{-1} (AX + L) \quad \text{وطه} \quad (6.8.15)$$

من هذه العلاقة نحسب قيمة التقدير $\hat{\beta}$.

لندخل الآن تعبير K من (6.8.12) في (6.8.9) فنجد :

$$\hat{Y} = X + G' A' M' [B \hat{\beta} - (AX + L)] \quad (6.8.16)$$

ان هذه العلاقة تسمح لنا بحساب التقدير \hat{Y} بعد ان يكون قد
حسبنا $\hat{\beta}$ من (6.8.15)

بادخال تعبير $\hat{\beta}$ في (6.8.16) نجد قانونا يسمح لنا بحاشية
بحساب التقدير \hat{Y} . فنجد :

$$\hat{Y} = X + G' A' M' [B N' B' M' (AX + L) - (AX + L)]$$

أو

$$Y = X + G' A' M' [B N' B' M' - I_{n,n}] (AX + L)$$

(6.8.17)

تلخص هذه القوانين كما يلي :

$$AY + L = B\beta \quad (6.5.2)$$

نموذج رياضي فيه $(A)_{n,m}$ (معطاة) $n < m$ و $r(A) = n$

$(B)_{n,p}$ و $p \leq n$ و $r(B) = p$

L شعاع ثابت في الفراغ n (معطى)

Y شعاع في الفراغ m مجهول يمكن قياسه

β شعاع مجهول لا يمكن قياسه

X شعاع في الفراغ m هو قياس الشعاع Y ومركباته متطابقة

\hat{Y} ، $\hat{\beta}$ مقداران للشعاعين Y و β ، معطيان

بالقوانين التالية الناتجة عن التقدير وفق مبدأ المربعات

الصغرى أى بشكل تصحيح فيه

$$(\hat{Y} - X)^T G (\hat{Y} - X) \text{ اصغرى}$$

حيث G مصفوفة الأوزان وتعرف بأوزان القياسات ، وهي مصفوفة

قطرية

$$\hat{\beta} = N' B' M' (AX + L) \quad (6.8.15) \text{ لدينا}$$

$$\hat{Y} = X + G' A' M' [B \hat{\beta} - (AX + L)] \quad (6.8.16)$$

$$\hat{Y} = X + G' A' M' [B N' B' M' - I_m] (AX + L) \quad (6.8.17)$$

$$M = A G A' \quad (6.8.11) \quad N = B' M' B \quad (6.8.14) \text{ حيث}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{g_m} \end{pmatrix}$$

(6.9) — حالة القياسات المستقلة وذات نفس الدقة :

إذا كانت القياسات مستقلة وذات نفس الدقة فهذا يعني ان لها نفس الانحراف المعياري أى نفس الخطأ المتوسط التربيع. تعني هذه الخاصة ان للقياسات اوزانا متساوية ويمكن اعتبار كل وزن مساوي للوحدة .

تتحول عدد من الصفوف القطرية للوزان G الى صفوفه احادية

I أى

$$G = I \quad (6.9.1)$$

باعتبار هذه الخاصة تصبح العلاقات السابقة :

$$M = A A^T \quad (6.9.2)$$

$$N = B^T B \quad (6.9.3)$$

$$\hat{\beta} = N^{-1} B^T M^{-1} (A X + L) \quad (6.9.4)$$

$$\hat{Y} = X A^T M^{-1} [B \hat{\beta} - (A X + L)] \quad (6.9.5)$$

أو بدون حساب قيمة β من (6.8.17)

$$\hat{Y} = X A^T M^{-1} [B N^{-1} B^T M^{-1} - I_{n,n}] (A X + L) \quad (6.9.6)$$

(6.10) — حالات خاصة :

ستستخرج الان من مجموعة القوانين (6.8.18) الحالات الخاصة التالية :

أ — حالة القياسات الشرطية

لقد وجدنا ان النموذج النهائي لها هو

$$A Y + L = 0 \quad (6.4.3)$$

والذى يمكن استنتاجه من النموذج العام (6.5.2) بوضع

$$p = 0 \quad B = 0 \quad (6.6.1)$$

فما لا يوجد حساب سوى مقدار واحد \hat{Y} يمكن حسابه من

$$(6.9.6) \quad \text{بأخذ بعين الاعتبار (6.6.1)}$$

$$\hat{Y} = X - G' A' M' (A X + L) \quad \text{نجد}$$

وبادخال قيمة M من (6.6.11) نجد

$$\hat{Y} = X - G' A' (A G' A')^{-1} (A X + L) \quad (6.10.1)$$

من هذه العلاقة نحسب قيمة \hat{Y}

وفي حالة القياسات الممتلئة الحاصية الدقة أى

$$G = I$$

نجد

$$\hat{Y} = X - A' (A A')^{-1} (A X + L) \quad (6.10.2)$$

ب- حالة القياسات بالواسطة أو غير المباشرة :

لقد وجدنا هنا ان النموذج النهائي متعدد بالعلاقة التفاضلية

التالية :

$$B \beta = Y + L \quad (6.3.3)$$

يمكن الحصول على هذا النموذج اعتبارا من النموذج العام (6.5.2)

بوضع

$$m = n \quad A = I_{(n,n)} \quad (6.6.2)$$

إذا اخذنا بعين الاعتبار (6.6.2) في المعادتين (6.9.4)

و (6.9.5) نجد :

$$\hat{\beta} = N' B' M' (X + L) \quad (6.10.3)$$

$$\hat{Y} = X + G' M' [B \hat{\beta} - (X + L)] \quad (6.10.4)$$

$$M = A G' A' \quad (6.8.11) \text{ ولكن لدينا}$$

وتصبح باعتبار (6.6.2)

$$M = G' \quad (6.10.5)$$

$$M' = G \quad \text{و}$$

وطيه نستطيع ان نكتب العلاقة (6.10.4) على الشكل :

$$\hat{Y} = X + B \hat{\beta} - X - L$$

أو

$$\boxed{\hat{Y} = B \hat{\beta} - L} \quad (6.10.6)$$

وهذا متوقع اذن ان التقديرات \hat{Y} يحققان النموذج (6.3.3)

وهذه العلاقة الاخرى ليست الا (6.3.3) يتممها المجاهيل

بالقدرات •

$$N = B' M' B \quad (6.8.14) \text{ ولقد وجدنا ان:}$$

هادخال (6.10.5) نجد

$$N = B' G B \quad (6.10.7)$$

وتصبح (6.10.3) هادخال (6.10.7) و (6.10.5) :

$$\boxed{\hat{\beta} = (B' G B)^{-1} B' G (X + L)} \quad (6.10.8)$$

تعطينا هذه العلاقة قيمة التقدير $\hat{\beta}$ في حالة القياسات بالواسطة

كما تعطينا العلاقة (6.10.6) قيمة التقدير \hat{Y} •

وفي الحالة الخاصة عندما تكون القياسات مستقلة ومتساوية الدقة

أي $G = I$ نجد

$$\boxed{\hat{\beta} = (B' B)^{-1} B' (X + L)} \quad (6.10.9)$$

$$\boxed{\hat{Y} = B \hat{\beta} - L} \quad (6.10.6)$$

ج — حالة القياسات المباشرة :

لقد بينا ان النموذج الرياضي لهذه القياسات هو :

$$B\beta = Y \quad (6.2.3)$$

وقد بينا اننا نحصل عليه اعتبارا من النموذج القياسات غير المباشرة بوضع

$$P = I \quad L = 0 \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.6.4)$$

و $\hat{\beta}$ و \hat{Y} يمكن حسابها من (6.10.8) و (6.10.6) بادخال هذه الشروط .

$$B^T G B = g_1 + g_2 + \dots + g_n = \sum_{i=1}^n g_i \quad \text{نجد بسهولة}$$

$$(B^T G B)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad \text{فتكون} \quad (6.10.10)$$

لحساب الان $B^T G X$ لدينا :

$$B^T G X = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n = \sum_{i=1}^n g_i x_i \quad (6.10.11)$$

واعتبار $L = 0$ تعطينا (6.10.8) بأخذنا بعين الاعتبار (6.10.10) و (6.10.11) .

$$\hat{\beta} = \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad (6.10.12)$$

أى ان المقدري هذه الحالة هي المتوسط الموزونة .

وتصبح العلاقة (6.10.6) :

$$\hat{Y} = B\hat{\beta} \quad (6.10.12)$$

وفي حالة القياسات المستقلة المتساوية الدقة لدينا

$$g_1 = g_2 = \dots = g_n = 1$$

وتصبح العلاقة (6.10.12)

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

(6.10.13)

أى نحصل على المتوسط الحسابية كقدر لـ β .

(6.11) - حالة نماذج غير خطية :

لنعتبر n معادلة غير خطية

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) &= 0 \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) &= 0 \\ \vdots \\ f_n(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) &= 0 \end{aligned}$$

(6.11.1)

$$p \leq n \leq m$$

حيث

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ شعاع مجهول يمكن قياسه}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ وسطاء مجهولة القيمة لا يمكن قياسها}$$

لنرمز بـ القياس أى :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

وهي قياسات مستقلة

ذات اوزان معروفة

بالمصفوفة القطرية G

يمكننا ان نكتب جلة المعادلات على الشكل

$$F(Y, \beta) = 0 \quad (6.11.2)$$

وطبقا لاجاد خطيين \hat{Y} و $\hat{\beta}$ يمكن ان (6.11.2) أي

$$F(\hat{Y}, \hat{\beta}) = 0 \quad (6.11.3)$$

وان يتحقق عددا المبرعات المصغرى :

$$r = (Y - X)^T G (Y - X) = \text{minimum} \quad (6.11.4)$$

ان النموذج (6.11.2) غير خطي فلا يمكننا تطبيق القواعد

التي وجدناها في الفقرات السابقة ، لذا سنفرض انه لدينا قيمتين

تقريبيتين Y_0 و β_0 ولكن :

فيمكننا ان نكتب :

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= Y_0 + d\hat{Y} \\ \hat{\beta} &= \beta_0 + d\hat{\beta} \end{aligned} \quad (6.11.5)$$

هكفي تعيين التزايدات $d\hat{Y}$ و $d\hat{\beta}$

بادخال (6.11.5) في (6.11.4) نجد :

$$r = (Y_0 + d\hat{Y} - X)^T G (Y_0 + d\hat{Y} - X) = \text{minimum} \quad (6.11.6)$$

نوضع

$$dX = Y_0 - X \quad (6.11.7)$$

تصبح العلاقة (6.11.6) :

$$r = (dY - dX)^T G (dY - dX) = \text{minimum} \quad (6.11.8)$$

ان (6.11.5) تعني :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1)_0 \\ (y_2)_0 \\ \vdots \\ (y_m)_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\hat{y}_1 \\ d\hat{y}_2 \\ \vdots \\ d\hat{y}_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1)_0 \\ (\beta_2)_0 \\ \vdots \\ (\beta_p)_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\hat{\beta}_1 \\ d\hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ d\hat{\beta}_p \end{pmatrix}$$

هكذا ان نكتب المعادلات (6.11.1) بادخال التزايدات :

$$f_1((x_1)_0 + d\hat{x}_1, (x_2)_0 + d\hat{x}_2, \dots, (x_m)_0 + d\hat{x}_m, (\beta_1)_0 + d\hat{\beta}_1, (\beta_2)_0 + d\hat{\beta}_2, \dots, (\beta_p)_0 + d\hat{\beta}_p) = 0$$

$$f_2((x_1)_0 + d\hat{x}_1, (x_2)_0 + d\hat{x}_2, \dots, (x_m)_0 + d\hat{x}_m, (\beta_1)_0 + d\hat{\beta}_1, (\beta_2)_0 + d\hat{\beta}_2, \dots, (\beta_p)_0 + d\hat{\beta}_p) = 0$$

$$f_n((x_1)_0 + d\hat{x}_1, (x_2)_0 + d\hat{x}_2, \dots, (x_m)_0 + d\hat{x}_m, (\beta_1)_0 + d\hat{\beta}_1, (\beta_2)_0 + d\hat{\beta}_2, \dots, (\beta_p)_0 + d\hat{\beta}_p) = 0$$

(6.11.9)

~~نكتب المعادلات (6.11.9) بالشكل التالي :~~

$$f_1(Y_0 + d\hat{Y}, \beta_0 + d\hat{\beta}) = 0$$

$$f_2(Y_0 + d\hat{Y}, \beta_0 + d\hat{\beta}) = 0$$

(6.11.10)

$$f_n(Y_0 + d\hat{Y}, \beta_0 + d\hat{\beta}) = 0$$

أو أيضا :

$$F(Y_0 + d\hat{Y}, \beta_0 + d\hat{\beta}) = 0 \quad (6.11.11)$$

إذا افترضنا ان التتابع (6.11.9) قابلة للاشتقاق بشكل مستمر

في مجال محوى \hat{Y} و $\hat{\beta}$ و Y_0 و β_0 . لنفرض التتابع

(6.11.9) حسب تاييلور قرب القيم Y_0 و β_0 فلدينا بالنسبة لتابع ما

f_i باعتبار ان التزايدات لامتناهيات في الصغر من الدرجة الاولى

صاحبال اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية :

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_0 d\hat{y}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\right)_0 d\hat{y}_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_m}\right)_0 d\hat{y}_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}\right)_0 d\hat{\beta}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}\right)_0 d\hat{\beta}_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_p}\right)_0 d\hat{\beta}_p = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.11.12)$$

يمكننا كتابتها على الشكل :

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_0 d\hat{y}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\right)_0 d\hat{y}_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_m}\right)_0 d\hat{y}_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}\right)_0 d\hat{\beta}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}\right)_0 d\hat{\beta}_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_p}\right)_0 d\hat{\beta}_p = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (6.11.13)$$

نلاحظ بسهولة انه بالنسبة لكافة المعادلات أى بالنسبة لـ

$i = 1, 2, \dots, n$ نستطيع ان نكتب من (6.11.13) :

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + F_y(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) d\hat{y}_1 + F_\beta(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) d\hat{\beta}_1 = 0$$

$$(6.11.14)$$

$$F_y(y_1, y_2, \dots, y_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_m}\right)_0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث}$$

$$(6.11.15)$$

وهي عبارة عن مصفوفة درجتها (n, m) ونسميها بالمصفوفة المعقوبة

لـ f_1, f_2, \dots, f_n بالنسبة للتحويلات (y_1, y_2, \dots, y_m)

وكذلك :

$$F'_{\beta} (Y, \beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_p} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_p} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_p} \right)_0 \end{pmatrix} \quad (6.11.16)$$

وهي عبارة عن مصفوفة درجتها (n, p) ونسميها بالمصفوفة المصفوفة للتتابع f_1, f_2, \dots, f_n بالنسبة للمتغيرات $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ وكذلك :

$$F (Y, \beta) = \begin{pmatrix} f_1 (Y, \beta) \\ f_2 (Y, \beta) \\ \vdots \\ f_n (Y, \beta) \end{pmatrix} \quad (6.11.17)$$

وهي عبارة عن شعاع في الفراغ n .
ان المصفوفات (6.11.15) و (6.11.16) و (6.11.17) هي مصفوفات عددية أي يمكن حساب كل عناصرها اذ يجب بعد الاشتقاق تعويض المجاميل بالقيم التقريبية Y, β .
نضع الان :

$$F'_Y (Y, \beta) = A_{(n, m)} \quad (6.11.18)$$

$$F'_{\beta} (Y, \beta) = B_{(n, p)}$$

$$F (Y, \beta) = L_{(n, 1)}$$

ستطيع كتابة (6.11.14) على الشكل :

$$Ad\hat{Y} - Bd\hat{\beta} + L = 0$$

أو

$$A d\hat{Y} + L = B d\hat{\beta} \quad (6.11.19)$$

وهكذا نلاحظ أننا حصلنا على علاقة مترتبة خطية للتقديرات $d\hat{Y}$ و $d\hat{\beta}$.

وعليها كما هو مذكور أعلاه أن نجد قيمة التقديرات بشكل تتحقق فيه هذه العلاقة ونبدأ المربعات الصغرى أى :

$$\psi = (d\hat{Y} - dX)^T G (d\hat{Y} - dX) = \text{minimum} \quad (6.11.8)$$

$$dX = Y_0 - X \quad \text{حيث: (6.11.7)}$$

نلاحظ أننا نستطيع أن نستخدم نفس القوانين (6.8.18) على

أن نعوض فيها $d\hat{\beta} = \beta$ و $d\hat{Y} = Y$ و $dX = X$ فنجد

$$d\hat{\beta} = \bar{N} \bar{B} \bar{M}' (A dX + L) \quad (6.11.20)$$

$$d\hat{Y} = dX + \bar{G} \bar{A}' \bar{M}' [B d\hat{\beta} - (A dX + L)] \quad (6.11.21)$$

$$M = A \bar{G}' \bar{A}' \quad \text{حيث (6.8.11)}$$

$$N = \bar{B}' \bar{M}' B \quad (6.8.14)$$

ان العلاقات (6.11.20) و (6.11.21) تسعان لنا بحساب

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + d\hat{\beta} \\ \hat{Y} &= Y + d\hat{Y} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &: \text{و } d\hat{Y} \text{ والعلاقاتين} \\ &(6.11.5) \end{aligned}$$

تعطيان قيمة التقديرات \hat{Y} و $\hat{\beta}$

لكننا في شر تايلور (6.11.12) اعلنا اللامتناهيات في الصفر في الدرجة الثانية فالقيم \hat{Y} و $\hat{\beta}$ التي ستحصل عليها سوف تكون تقريبيتين وعلينا اعتبارها قima تقريبية للمقدَّرين عوضا عن Y و β ثم علينا ان نحسب من جديد $d\hat{\beta}$ و $d\hat{Y}$ وذلك بعد حساب عناصر المصفوفات (6.11.5) و (6.11.6) و (6.11.7) من أجل القيم التقريبية الجديدة • تعطينا بعد ذلك (6.11.5) قima ثانية للمقدَّرين وهكذا أو بالتقريب المتتالي الى ان تتحقق المتراجعات •

$$\left| \hat{Y}_{k+1} - \hat{Y}_k \right| \leq \delta_1$$

(6.11.22)

$$\left| \hat{\beta}_{k+1} - \hat{\beta}_k \right| \leq \delta_2$$

حيث δ_k شعاع في الفراغ m مركباته موجبة اختيارية حسب الدقة المطلوبة •

و δ_k شعاع في الفراغ p مركباته موجبة اختيارية حسب الدقة المطلوبة و $\hat{\beta}_k$ و \hat{Y}_k هي المقدَّران اللذان نحصل عليهما بعد k عملية تقريب متتالي •

ملاحظة : من الواضح اننا نستطيع ان نعتبر كقيمة تقريبية اولى لـ Y

$$Y_0 = X \quad \text{القياسات } X \text{ أى نأخذ}$$

اما القيمة التقريبية الاولى β_0 ، فحسب طبيعة المسألة يمكن

يجاد مركباتها اما تخطيطيا أو بحل m معادلة بعد اعتبار قيم لـ Y في هذه المعادلات القياسات X •

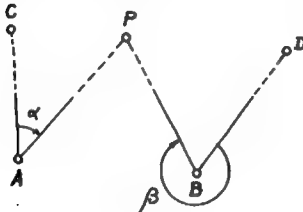
الفصل السابع

تطبيقات لبدأ المربعات الصغرى

(7.1) - تعديل التقاطع والظهور

لنذكر أولاً بطريقة التقاطع وطريقة الظهور .

١ - طريقة التقاطع . لنكن P نقطة مجهولة و A و B نقطتين معلومتين معرفتين بأحداثياتها ومن هاتين النقطتين يمكننا رؤية النقطة P . يمكننا تعيين النقطة P بقياسات زاوية فقط إذا عينا الاتجاهين AP و BP ولذلك نقيس الزاويتين AP الزاوية α بين الاتجاه AP



والا اتجاه AC حيث C نقطة معلومة (معروفة بأحداثياتها) مرئية من A . والزاوية β بين الاتجاه BP والاتجاه BD حيث D نقطة

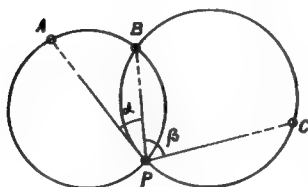
معلومة (معروفة بأحداثياتها) . (شكل 7.1.1)

ان هذه القياسات وأحداثيات التقاطع المعروفة تسمح لنا بحساب (X_P, Y_P) إحداثيات النقطة P أي تصبح النقطة P معلومة وتعيين تعييناً وحيداً .

هذا وان كانت A مرئية من B والعكس فالتساوي نستطيع تعيين P اذا قلنا الزاوية بين الاتجاه AP و AB والزاوية بين الاتجاه $B-P$ و BA .

يمكننا تحقيق المعطيات والقياسات باجراء تقاطع لـ P من نقطة معروفة تالفة E وتعيين الاتجاه EP أى بقياس زاوية افقية λ نسي طريقة التقاطع بطريقة تعيين نقطة بخطوط رصد خارجية .

٢ — طريقة التقيوم . لكن P نقطة مجهولة و (A, B, C) نقاط ذات احداثيات معلومة ، للفرض اننا مرئية من النقطة P نستطيع ان نعين النقطة P وبالتالي يمكننا حساب احداثياتها اذا قمنا الزاويتين الالفتين $(A\hat{P}B = \alpha)$ و $(B\hat{P}C = \beta)$. بالحقيقة لنعتبر النقاط A, B, C على المخطط (شكل 7.1.2) باعتبار ان احداثياتها معطاة) . ان المحل الهندسي للنقاط الثلاث ترى فيها خط مستقيم ضمن زاوية ثابتة



هو قوس دائرة نسميه بالقوس المحدد للزاوية ، والنقطة P تقع من جهة على القوس المحدد للزاوية α وهو المحل الهندسي للنقاط التي ترى فيها القطعة AB ، ومن جهة ثانية على القوس

المحدد للزاوية β الذى هو (شكل 7.1.2)

المحل الهندسي للنقاط التي ترى فيها القطعة BC . ان هذين القوسين يتقاطعان في النقطة B وفي النقطة P . يمكننا ان نلشى ، بطريقة هندسية من المعطيات النقطة P ، وبالتالي نستطيع حساب احداثياتها .

ان حساب الاحداثيات يتم باحدى الطرق المعروفة (غوس كاسيني ... الخ) .

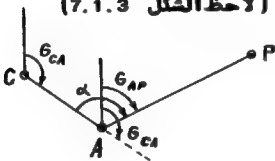
تسمى هذه الطريقة بالتقويم أو بطريقة تعيين نقطة بخطوط رصد داخلية) .

نلاحظ انه في طريقة التقاطع والتقويم نعتد فقط على قياسات زاوية ، ونلاحظ انه يلزمنا في حالة التقاطع اتجاهان لتعيين النقطة P تعبنا وحيدا ، ولزمنا ثلاثة اتجاهات في حالة التقاطع لتعيين النقطة P تعبنا وحيدا (على ان لا تكون النقاط A, B, C, P واقعة على دائرة) .

ان الفرق بين طريقة التقاطع والتقويم هو انه في الطريقة الاولى نركز جهاز المساحة في النقاط المعلومة ونرصد النقاط المجبولة من الاتجاهات نحوها بينما في الطريقة الثانية نركز جهاز المساحة في النقطة المجبولة ونوجهه نحو النقاط المعلومة ونقيس زوايا افقية . نستطيع في طريقة التقاطع ان نحسب من القياسات المسوت الاعتبارية للاتجاهات المعينة نحو P .

فمثلا نستطيع حساب السمت G_{AP} :

$$G_{AP} = G_{CA} + \alpha - 200^g \quad (7.1.1)$$



(لاحظ الشكل 7.1.3)

حيث G_{CA} هو السمت الاعتباري للضلع المعلوم CA وحسب اعتبارا من احداهات النقطتين A و C :

$$\text{tg } G_{CA} = \frac{X_A - X_C}{Y_A - Y_C}$$

(شكل 7.1.3)

تعتبر احداهات النقاط المعطاة صحيحة وبالتالي يمكن اعتبار السمت G_{CA} صحيحا ونستنتج من (7.1.1) ان دقة G_{AP} هو من

دقة α . لذلك نقول من السمت G_{α} انه سمت مقاس ، ولاحظ بسهولة اننا لا نستطيع حساب السموت الاعتبارية للاتجاهات في حالة التظهم .

لنفرض الان ان لدينا عددا من نقاط التظلمات المعروفة باحداثياتها المعمودية ونريد تعيين نقطة تظلمت جديدة بطريقة التقاطع أو التظهم أو التقاطع والتظهم معا ، وذلك استنادا الى نقاط معروفة ومرفقة من هذه النقطة ، وكما يبيننا اعلاه ان هذه الطرق لا تتطلب سوى قياس اتجاهات افقية من نقاط معلومة نحو النقطة المراد تعيينها (التقاطع) أو من النقطة المراد تعيينها نحو نقاط معلومة (التظهم) .

لتعيين نقطة تظلمت بهذه الطرق لا نكتفي بقياسات كافية لحساب اتجاهات النقطة بل نقوم باجراء قياسات فائضة تضمن لنا من جهة تحقيقا للقياسات نفسها وتسمح لنا من جهة ثانية باجراء عملية تعديل بغية الحصول على نتائج دقيقة . ففي التقاطع نعين النقطة بثلاثة اتجاهات من ثلاث نقاط معلومة على الاقل ، وفي التظهم ترصد على الاقل اربع نقاط معلومة .

لنفرض ان نقطة تظلمت قد عينت بـ n خط ورصد خارجي و n' خط ورصد داخلي ، فاذا افترضنا ($n' = 0$) تصبح النقطة معينة فقط بعملية تقاطع ، وعدد ذلك يجب ان يكون لدينا ($n \geq 3$) للحصول على قياسات فائضة ، أما اذا افترضنا ($n = 0$) و ($n' \geq 4$) فعدد ذلك تكون النقطة معينة بالتظهم بقياسات فائضة .

سندعبر فيما يلي الحالة العامة أي أن النقطة معينة بالتقاطع والتظهم معا أي $n \neq 0$ و $n' \neq 0$ ويمكننا استنتاج ، كحالات خاصة حالة التقاطع وحالة التظهم .

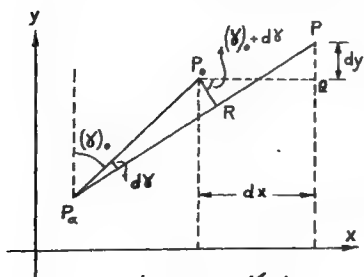
يمكننا حساب احداثيات مؤقتة (x_0, y_0) للنقطة P المعينة بالتقاطع والتفهم . يمكن حساب هذه الاحداثيات سواء بعملية تقاطع باتجاهين من الاتجاهات المقاسة أو بعملية تفهم على ثلاث نقاط معلومة .

لحساب (x_0, y_0) لم نستخدم كافة القياسات وعليها الان تعديلها للحصول على احداثيات نهائية بأخذ كافة القياسات بعين الاعتبار ، وسنستعرض هنا طريقة التعديل هذه حسب مبدأ المربعات الصغرى المشرح في الفصل السابق .

$$\begin{array}{l} x = x_0 + dx \\ y = y_0 + dy \end{array} \quad \text{الضع :} \quad (7.1.2)$$

حيث dx و dy هي تصحيحات يجب اضافتها جبريا على القيم المؤقتة للحصول على القيم النهائية النظرية .

لنفترض الان عن النموذج الرياضي الذي يربط dx و dy لكن النقطة P المسطة للاحداثيات التقريبية (x_0, y_0) و P النقطة النظرية ذات الاحداثيات (x, y) و $P_2(x_2, y_2)$ نقطة معلومة رصدنا فيها النقطة P (في حالة التقاطع) أو رصدناها من النقطة P (في حالة التفهم) (شكل 7.1.4) بما أن النقطتين P_0 و P_2



(شكل 7.1.4)

ذات احداثيات معلومة
فلستطيع ان نحسب من
هذه الاحداثيات الست
الاعتباري لـ P_0 و P_2 لكن
هذا الست $(y)_0$ الذي
نسجه بالست الاعتباري
المعسوب

ان الفرق بين هذا السمت والسمت الاعتبارى لـ $P_\alpha P$ مثل بالزاوية ($P_\alpha \hat{P}_\alpha P = d\alpha$) ان المسافة $P_\alpha Q$ تعطى dx كما ان المسافة PQ هي dy .

ليكن R مسقط العمود النازل من P_α على المستقيم $P_\alpha P$ لنسقط المثلث PRQ على $P_\alpha R$ فيمكننا ان نكتب :

$$P_\alpha R = dx \cos((\alpha)_0 + d\alpha) - dy \sin((\alpha)_0 + d\alpha)$$

وبه وباعتبار $d\alpha$ لامتناهيات في الصغر من الدرجة الاولى وبإهمال

اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية :

$P_\alpha R = \cos(\alpha)_0 dx - \sin(\alpha)_0 dy - [\sin(\alpha)_0 d\alpha dx + \cos(\alpha)_0 d\alpha dy]$
 وبإهمال الحددين بين القوسين على اعتبار انهما لامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية تصبح العلاقة الاخيرة :

$$P_\alpha R = \cos(\alpha)_0 dx - \sin(\alpha)_0 dy \quad (7.1.3)$$

$$P_\alpha R = P_\alpha P_\alpha \sin d\alpha = P_\alpha P_\alpha \cdot d\alpha = D \cdot d\alpha \quad \text{ولكن لدينا :}$$

$$dG = \frac{\cos(\alpha)_0}{D} dx - \frac{\sin(\alpha)_0}{D} dy \quad \text{وبه تصبح} \quad (7.1.3)$$

$$d\alpha^{cc} = \alpha dx + b dy \quad \text{أو} \quad (7.1.4)$$

$$\alpha = \int^{cc} \frac{\cos(\alpha)_0}{D} , \quad b = - \int^{cc} \frac{\sin(\alpha)_0}{D} \quad \text{حيث} \quad (7.1.5)$$

نلاحظ ان العلاقة (7.1.4) تربط بين تغير السمات

الاعتبارى وتغيرات الاحداثيات للنقطة P .

وهكذا فلكل اتجاه مرصود يمكننا كتابة معادلة من الشكل (7.1.4)

وجد :

أ) حالة خطوط رصد خارجية :

باعتبار n خط رصد خارجي للدخل الرمز التالية :

١ - $(\delta_1), (\delta_2), \dots, (\delta_n)$: السموت الاعتبارية المحسوبة لخطوط

• الرصد

ت حسب هذه السموت استنادا الى

احداثيات النقاط المعلومة واحداثيات

• النقطة التقريبية P_0

٢ - $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$: السموت الاعتبارية النظرية لخطوط

الرصد وهي مجهولة ولكن يمكن قياسها

٣ - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: السموت الاعتبارية الطاقة لخطوط

الرصد أى قياسات العناصر x_1, x_2, \dots, x_n

وهذه القياسات بالطبع مستقلة •

٤ - g_1, g_2, \dots, g_n : أوزان القياسات •

٥ - $d\delta_1, d\delta_2, \dots, d\delta_n$: الترايدات المجهولة وهي الفروقات

بين السموت النظرية والسموت المحسوبة

أى بين δ_i و (δ_i)

لنذكر انه قد بينا اننا في حالة خطوط الرصد الخارجية

(التقاطع) يمكننا اعتبار اننا قسنا فوراً السموت الاعتبارية اذ يمكن

حسابها بسهولة اعتباراً من القراءات للزوايا الاقنية واستناداً الى

احداثيات النقاط المعلومة المعتبرة صحيحة (وقد بينا كيفية هذا

الحساب في المعلقة (7.1.1) • ان هذه السموت تحمل نفس

اخطاء القياسات •

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\delta_1)_o + d\delta_1 \\ \delta_2 &= (\delta_2)_o + d\delta_2 \\ &\vdots \\ \delta_n &= (\delta_n)_o + d\delta_n \end{aligned}$$

يمكننا ان نكتب :

(7.1.6)

ولكن قيمة $d\delta_i$ يمكن التعبير عنها بدلالة تغيرات الاحداثيات dx و dy وفق العلاقة (7.1.4) وبادخال قيم هذه التزايدات وفق (7.1.4) نكتب جملة العلاقات (7.1.6) على الشكل :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_1 dx + b_1 dy + (\delta_1)_o \\ \delta_2 &= a_2 dx + b_2 dy + (\delta_2)_o \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_n &= a_n dx + b_n dy + (\delta_n)_o \end{aligned}$$

(7.1.7)

واعتادا على (7.1.5) لدينا :

$$\alpha_i = \int^{cc} \frac{\cos(\delta_i)_o}{D_i} \quad \beta = - \int^{cc} \frac{\sin(\delta_i)_o}{D_i}$$

(7.1.8)

$i = 1, 2, \dots, n$

حيث $(\delta_i)_o$ هو السمت المحسوب لاتجاه الرصد i و D_i المسافة المحسوبة من الاحداثيات للنقطة P_o والنقطة المعلومة P_i لندخل الرمز التالية :

$$P = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad P_o = \begin{pmatrix} (\delta_1)_o \\ (\delta_2)_o \\ \vdots \\ (\delta_n)_o \end{pmatrix} \quad B_{(n,2)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \quad dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

(7.1.8)

فيمكننا كتابة مجموعة المعادلات (7.1.7) على الشكل :

$$\Gamma = B dX + \Gamma_0 \quad (7.1.9)$$

ان Γ شعاع مجهول يمكن قياسه وقياساته هي مركبات الشعاع :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (7.1.10)$$

وهذه القياسات مستقلة وذات اوزان g_1, g_2, \dots, g_n تعرف بالمصفوفة القطرية G :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_n \end{pmatrix} \quad (7.1.11)$$

أما dX فهو شعاع مجهول يمكن قياسه و B مصفوفة عديدة
يمكن حساب عناصرها بمجرد ان نفرض قيمة نظرية للاحداثيات أي
نفرض نقطة نظرية P_0 . ان الرتبة المظن لـ B هي 2 . أما
 Γ_0 فهو شعاع معلوم أي يمكن حسابه طالما ان الاحداثيات P_0
معلومة .

نلاحظ مقارنة النموذج (7.1.9) مع النموذج (6.3.3)

انه لدينا هنا نموذج للقياسات غير المباشرة . ان القديين $d\hat{X}$ ،
 $\hat{\alpha}$ يعطيان اذن بالقوانين (6.10.8) و (6.10.6) (وبمسبق
المرحعات الصغرى) لتجد بادخال الرمز المذكورة اعلاه في هذين

$$d\hat{X} = (B^T G B)^{-1} B^T G (\alpha - \Gamma_0) \quad \text{القانونين :} \quad (7.1.12)$$

$$\hat{\Gamma} = B d\hat{X} + \Gamma_0 \quad (7.1.13)$$

ومن هاتين الماتتين نستطيع حساب المتجهين \hat{X} ، \hat{P} ويكون
الاحداثيات المعدلة \hat{x} ، \hat{y} للنقطة P :

$$\begin{cases} \hat{x} = x_0 + d\hat{x} \\ y = y_0 + d\hat{y} \end{cases} \quad (7.1.14)$$

وذلك استنادا الى (7.1.2) حيث

$$d\hat{X} = \frac{d\hat{x}}{d\hat{y}} \quad (7.1.15)$$

ب) حالة خطوط الرصد الداخلية :

لدينا n' خط رصد داخلي ، للدخل الرمز التالية :

١ - $(\hat{x}'_1), (\hat{x}'_2), \dots, (\hat{x}'_{n'})$ السمات الاعتبارية المعهودة
لخطوط الرصد وتحسب استنادا
الى احداثيات النقاط المعلومة

واحداثيات النقطة المركزية P_0 .

٢ - $\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \dots, \hat{x}'_{n'}$ السمات الاعتبارية النظرية وهي

مجهولة ولا يمكن قياسها في حالة

خطوط الرصد الداخلية (التقويم)

٣ - $r'_1, r'_2, \dots, r'_{n'}$ القياسات اللاحقة وفق خطوط

الرصد الداخلية أى القراءات

النهائية وفق اتجاهات الرصد

الداخلية (الزوايا اللاحقة)

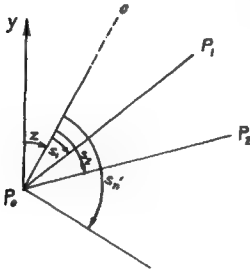
٤ - $s'_1, s'_2, \dots, s'_{n'}$ القراءات النظرية للاتجاهات

ان قياسات $(s'_1, s'_2, \dots, s'_{n'})$

هي $(r'_1, r'_2, \dots, r'_{n'})$.

- $g'_1, g'_2, \dots, g'_n = 0$ اوزان القياسات
- $d\delta'_1, d\delta'_2, \dots, d\delta'_n = 6$ التزايدات المجهولة وهي الفروقات بين السموت النظرية والسموت المقاسة

لنعرف الان مجهولا جديدا z نسميه بمجهول التوجيه
 ويعرف لنا السموت الاعتبارى لاتجاه الصغرى المقسم
 ان s'_i هي الزاوية التي يصلها الاتجاه $P_0 P_i$ مع مفسر المقسم وقاسها هو r'_i وكذلك s'_2, \dots



(شكل 7.1.5)

(شكل 7.1.5)

فيكتنا ان نكتب :

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= z + s'_1 \\ \delta'_2 &= z + s'_2 \\ &\vdots \\ \delta'_{n'} &= z + s'_{n'} \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

ولكن لدينا ايضا :

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= (\delta'_1)_0 + d\delta'_1 \\ \delta'_2 &= (\delta'_2)_0 + d\delta'_2 \\ &\vdots \\ \delta'_{n'} &= (\delta'_{n'})_0 + d\delta'_{n'} \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

بكتابة تساوى العلاقات (7.1.16) و (7.1.17) نجد

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= -z + d\delta'_1 + (\delta'_1)_0 \\ \delta'_2 &= -z + d\delta'_2 + (\delta'_2)_0 \\ &\vdots \\ \delta'_{n'} &= -z + d\delta'_{n'} + (\delta'_{n'})_0 \end{aligned}$$

(7.1.18)

ولكن من (7.1.4) لدينا :

$$d\delta'_i = a'_i dx + b'_i dy$$

(7.1.19)

حيث :

$$a'_i = \rho^{\omega} \frac{\cos(\delta'_i)_o}{D'_i}, \quad b'_i = -\rho^{\omega} \frac{\sin(\delta'_i)_o}{D'_i}$$

(7.1.20)

$$i = 1, \dots, n'$$

وذلك اعتمادا على (7.1.5)

ان الاطال (7.1.20) يمكن حسابها طالما ان احداثيات النقطة

معلومة واحداثيات النقطة المرصودة معلومة .

بادخال (7.1.19) في (7.1.18) نجد :

$$\begin{aligned} s'_1 &= -z + a'_1 dx + b'_1 dy + (\delta'_1)_o \\ s'_2 &= -z + a'_2 dx + b'_2 dy + (\delta'_2)_o \\ &\vdots \\ s'_{n'} &= -z + a'_{n'} dx + b'_{n'} dy + (\delta'_{n'})_o \end{aligned}$$

(7.1.21)

لنضع

$$z = z_o + dt$$

(7.1.22)

حيث z_o قيمة تقريبية سنبين كيفية حسابها .

ونكتب المعادلات (7.1.21) :

$$\begin{aligned} s'_1 &= -dz + a'_1 dx + b'_1 dy + (\delta'_1)_o - z_o \\ s'_2 &= -dz + a'_2 dx + b'_2 dy + (\delta'_2)_o - z_o \\ &\vdots \\ s'_{n'} &= -dz + a'_{n'} dx + b'_{n'} dy + (\delta'_{n'})_o - z_o \end{aligned}$$

(7.1.23)

لندخل الرمز التالية :

$$S = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} \quad S_0 = \begin{pmatrix} (s'_1)_0 - z_0 \\ (s'_2)_0 - z_0 \\ \vdots \\ (s'_n)_0 - z_0 \end{pmatrix}$$

$$C_{n,z} = \begin{pmatrix} -1 & a'_1 & b'_1 \\ -1 & a'_2 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & a'_n & b'_n \end{pmatrix} \quad dY = \begin{pmatrix} dz \\ dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (7.1.24)$$

يمكننا كتابة (7.1.23) على الشكل :

$$\boxed{S = C dY + S_0} \quad (7.1.25)$$

ان S هو شعاع مجهول يمكن قياسه وقياساته هي مركبات الشعاع :

$$R = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_n \end{pmatrix} \quad (7.1.26)$$

وهذه القياسات مستقلة وذات اوزان g'_1, g'_2, \dots, g'_n نعرفها بالصيغة القطرية

$$G' = \begin{pmatrix} g'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g'_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & g'_n \end{pmatrix} \quad (7.1.27)$$

أما dY فهو شعاع مجهول لا يمكن قياسه و C مصفوفة عددية يمكن حساب عناصرها وكذلك الشعاع S_0 .

بمقارنة النموذج الرياضي (7.1.25) مع (6.3.3) نجد انه

لدينا نموذج للقياسات غير المباشرة أو بالواسطة • ان القدرتين \hat{S} و $d\hat{Y}$ يعطيان بالقانونين (6.10.8) و (6.10.6) وذلك

باعتبار التقدير وفق مبدأ المربعات الصغرى .
 نحدد بادخال الرموز اعلاه في القانونين المذكورين :

$$\boxed{d\hat{Y} = (C^T G' C)^{-1} C^T G (R - S_r)} \quad (7.1.28)$$

$$\hat{S} = C d\hat{Y} + S_r \quad (7.1.29)$$

من ماعين غالماتكين نستطيع حساب التقديرات
 وتكون الاحداثيات المعدلة $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ومجهول العرجية المعدل \hat{z}
 النقطة P :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x} &= x_0 + d\hat{x} \\ \hat{y} &= y_0 + d\hat{y} \\ \hat{z} &= z_0 + d\hat{z} \end{aligned}}$$

$$\boxed{d\hat{Y} = \begin{pmatrix} d\hat{x} \\ d\hat{y} \\ d\hat{z} \end{pmatrix}} \quad \text{حيث} \quad (7.1.30)$$

يمكننا حساب قيمة عرجية z_0 من المعادلة الاولى لـ (7.1.23)
 بادخال r'_r عوضا r'_r وجعل $dx = dy = 0$ فنحصل على :

$$\boxed{z_0 = r'_r - (r'_r)_0} \quad (7.1.31)$$

ج — حالة خطوط رصد خارجية وداخلية (تقاطع وتطعيم معا) :

سنفترض اننا هنا نقطة P خط رصد خارجي و n' خط
 رصد داخلي . نستطيع ان نكتب المعادلات (7.1.7) و (7.1.23)

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= a_1 dx + b_1 dy + (\gamma_1)_0 \\
 \gamma_2 &= a_2 dx + b_2 dy + (\gamma_2)_0 \\
 &\vdots \\
 \gamma_n &= a_n dx + b_n dy + (\gamma_n)_0 \\
 s'_1 &= -dz + a'_1 dx + b'_1 dy + [(\gamma'_1)_0 - z_0] \\
 s'_2 &= -dz + a'_2 dx + b'_2 dy + [(\gamma'_2)_0 - z_0] \\
 &\vdots \\
 s'_n &= -dz + a'_n dx + b'_n dy + [(\gamma'_n)_0 - z_0]
 \end{aligned}
 \tag{7.1.32}$$

مادخال الرمز التالية :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} & B_{n+a,b} &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n & b_n \\ -1 & a'_1 & b'_1 \\ -1 & a'_2 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & a'_n & b'_n \end{pmatrix} \\
 dX &= \begin{pmatrix} dz \\ dx \\ dy \end{pmatrix} & \Gamma &= \begin{pmatrix} (\gamma_1)_0 \\ (\gamma_2)_0 \\ \vdots \\ (\gamma_n)_0 \\ (\gamma'_1)_0 - z_0 \\ (\gamma'_2)_0 - z_0 \\ \vdots \\ (\gamma'_n)_0 - z_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{7.1.33}$$

نكتب جملة المعادلات (7.1.32) على الشكل :

$$\boxed{\Gamma = B dX + \Gamma_i} \quad (7.1.34)$$

والمتجهين dX و Γ يعطيان بالعلاقات (7.1.12) و (7.1.13) على ان نعتبر هنا الرمز المميز في (7.1.33) وان نأخذ شعاع القياسات α في هذه الحالة :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \quad (7.1.35)$$

وسموفة الاوزان القطرية G

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & & & & \\ & g_2 & & & \\ & & g_n & & \\ & & & g'_1 & \\ & & & & g'_2 \\ & & & & & g'_n \end{pmatrix} \quad (7.1.36)$$

ملاحظة : بما اننا عملنا اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية

حيثما اشتقنا العلاقة (7.1.4) فيجب بالتقريب المتتالي حساب

القيم المعدلة ، الا انه في اغلب الاحيان نكتفي بتقريب واحد

وحادة اذا كانت الاحداثيات التقريبية ل P_i محسوبة من تقاطع

اتجاهين أو تقويم على ثلاثة اتجاهات نجعلها اوزانا للاتجاهات عادة

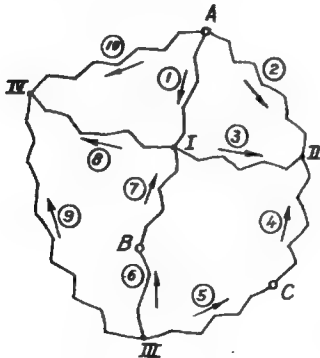
حيث $\frac{1}{D_i}$ بعد النقطة المرصودة بالكيلومتر واذا كانت $D_i \leq 1^{km}$

فنأخذ الوزن g مساويا للواحد .

(7.2) — تعديل شبكات التسوية :

لنعتبر النقاط A, B, C ذات الارتفاع المعروف (H_A, H_B, H_C) والمعتبر صحيحا ، لنفرض اننا استنادا الى هذه النقاط انشأنا شبكة تسوية (شكل 7.2.1) لتعيين ارتفاع النقاط (I, II, III, IV) فهذه النقاط تدعى بالعقد لان كلا منها ملحق بعدد من المضلعات (الفصل الخامس) . لنسم كل سهر محدود بين نقطة معلومة ونقطة أو بين عقدتين سارا .

لقد اجرينا في هذه الشبكة قياسات التسوية لمختلف المضلعات وحسبنا فروق الارتفاعات بين نقطة ونقطة أو بين عقدتين . لنرمز للمسارات بـ ($1, 2, 3, \dots$) وللفروق الارتفاعات القاسية بين ذروتي سار بـ (H_1, H_2, \dots) ولنرسم على كل سار سهما يميز الاتجاه الموجب لكل فرق ارتفاع .



نلاحظ من الشكل (7.2.1) انه لدينا عشر مسارات ، لكنه لتعيين ارتفاعات النقاط (I, II, III, IV) تعيها وحيدا يلزمنا اربعة مسارات . فلدينا اذن قياسات فائضة . يمكننا من جهة تحقيق القياسات ومن جهة ثانية تعديلها

(شكل 7.2.1)

للحصول على ارتفاعات معدلة

لنقاط (I, II, III, IV) وذلك باعتبار كافة القياسات ، ان تعديل

شبكة تسوية يمكن ان يتم اما باعداد نموذج القياسات الشرطية او
نموذج القياسات بالواسطة • ونشرح هاتين الطريقتين •

١ - التعديل بالقياسات الشرطية :

لحساب ارتفاع عقدة نكتفي بمسار واحد قل مسار اضافي يولد

معادلة شرطية • ينتج من هذا انه اذا افترضنا ان n عدد

العقد المجهولة في شبكة و t عدد مسارات الشبكة فلدينا :

$$n_c = t - n \quad (7.2.1)$$

معادلة شرطية يجب تحقيقها للحصول على ارتفاع وحيد لكل عقدة

مهما كان المسار المتبع في الحساب وفي حالة الشبكة بالشكل (7.2.1)

$$n_c = 10 - 4 = 6 \quad \text{لدينا}$$

سنة معادلات شرطية

لنرمز بـ (h_1, h_2, \dots, h_n) للفروق الارتفاعات الصحيحة

النظرية لهذا المسارات تلك كتابة المعادلات الشرطية تعتبر العقد عقدة

طوة عقدة ونلاحظ عدد المسارات الواصلة لها من النقاط المعلومة ومن

العقد التي سبق تعيينها فتتبع الطريقة التالية :

(أ) يمكن حساب ارتفاع النقطة II مثلا سواء بالمسار 2 اعتبارا من A

أو بالمسار 4 اعتبارا من C • فلدينا قياس فائض واحد يولد

معادلة شرطية هي :

$$H_A + h_2 - h_4 = H_C \quad (7.2.2)$$

(ب) باعتبار العقدة II قد عرفت الان لنعبر العقدة I ، يمكننا

حساب ارتفاعها سواء بالمسار 1 أو بالمسار 3 أو بالمسار 7 فلدينا

اذن قياسان فائضان يعطيان معادلتين شرطيتين مستقلتين هما :

$$H_A + h_1 - h_7 = H_B \quad (7.2.3)$$

$$H_A + h_1 + h_3 - h_4 = H_C \quad (7.2.4)$$

ج) يمكننا ان نفترض ان العقدتين II و I قد عمتا ، فلتعتبر
العقدة III يمكننا تعيين ارتفاعها بالمسار 6 أو بالمسار 5 فلدينا
اذن معادلة شرطية ولعدة هي :

$$H_B - h_6 + h_5 = H_C \quad (7.2.5)$$

د) نفترض الان ان العقد (I , II , III) قد عمت ، فلتعيين
العقدة IV يمكننا حساب ارتفاعها بالمسارات 9, 8, 10 فلدينا
اذن معادلتان شرطيتان :

$$H_A + h_{10} - h_9 - h_1 = H_A \quad (7.2.6)$$

$$H_A + h_{10} - h_9 + h_6 = H_B \quad (7.2.7)$$

ان المعادلات (7.2.2) حتى (7.2.7) مستقلة وأية معادلة
اخرى ستكون غير مستقلة عن هذه المجموعة أى يمكن استنتاجها من
المجموعة اعلاه فمثلا اذا كتبنا المعادلة الشرطية : (لاحظ الشكل
(7.2.1

$$H_A + h_1 + h_3 - h_2 = H_A$$

أى

$$h_1 + h_3 - h_2 = 0$$

فيمكننا استنتاجها بطرح (7.2.2) من (7.2.4) ، وهكذا
يمكننا ان نكتب المعادلات (7.2.2) حتى (7.2.7) على
الشكل :

$$\begin{aligned}
 & \cdot + h_2 + \cdot - h_4 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_C) = 0 \\
 & h_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - h_7 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_B) = 0 \\
 & h_1 + \cdot + h_3 - h_4 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_C) = 0 \\
 & \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + h_5 - h_6 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_B - H_C) = 0 \\
 & h_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - h_8 + \cdot + h_{10} + 0 = 0 \\
 & \cdot + \cdot - \cdot + \cdot + \cdot + h_6 + \cdot + \cdot - h_9 + h_{10} + (H_A - H_B) = 0
 \end{aligned}$$

(7.2.8)

لندخل الرمز التالية :

$$A_{(6,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{10} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} H_A - H_C \\ H_A - H_B \\ H_A - H_C \\ H_B - H_C \\ 0 \\ H_A - H_B \end{pmatrix}$$

(7.2.9)

ويكتب جطة المعادلات (7.2.8) على الشكل :

$$\boxed{A \hat{h} + L = 0} \quad (7.2.10)$$

ان شعاع \hat{h} يمكن قياسه وقياسات مركباته هي $\hat{h}'_1, \hat{h}'_2, \dots, \hat{h}'_{10}$

$$\hat{h}' = \begin{pmatrix} \hat{h}'_1 \\ \hat{h}'_2 \\ \vdots \\ \hat{h}'_{10} \end{pmatrix} \quad \text{لضع :} \quad (7.2.11)$$

نلاحظ ان النموذج (7.2.10) هو نموذج القياسات الشرطية

(6.4.3) وقد سبق ان وجدنا في الفصل السادس (القانون

6.10.1) القانون الذي يعطينا المقدّر \hat{h} وفق مبدأ المربعات

الصغرى والذي يحقق جملة المعادلة المتريسة (7.2.10) •

وبادخال المصفوفة القطرية G •

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_{10} \end{pmatrix} \quad (7.2.12)$$

نكتب من (6.10.1) وباستخدام الرمز في هذه المسألة :

$$\boxed{\hat{h} = \hat{h}' - G A^T (A G A^T)^{-1} (A \hat{h}' + L)} \quad (7.2.1)$$

من هذه العلاقة نحسب فروق الارتطاعات المعدلة (مركبات الشعاع

\hat{h}) وكما ذكرنا في الفصل السادس ان المقدّر \hat{h} المحسوبة من

(7.2.13) ثم تقديره وفق مبدأ المربعات الصغرى وبشكل تحقق

فيه المعادلة المتريسة (7.2.10) أي :

$$\boxed{A \hat{h} + L = 0} \quad (7.2.14)$$

لضع الان :

$$W = A h' + L$$

(7.2.15)

نسي الشعاع W بشعاع التسكرات حيث نلاحظ أن الطرف الثاني ليس إلا المعادلة (7.2.10) عدد تعويض h بالقياس h' ، فعدم تحقيقها هو التسكر .

• ويجب أن تكون مركبات الشعاع W صغيرة مغيرة باخطاء القياس .
بإدخال في (7.2.13) (7.2.15) نجد :

$$\hat{h} = h' - G A^T (A G A^T)^{-1} W$$

(7.2.16)

نعتبر لكل فرق ارتفاع يقاس h'_i وزنا g_i يتناسب عكسا مع طول المسار أي :

$$g_i = \frac{1}{l_i} \quad (7.2.17)$$

حيث l_i هو طول المسار ، وذلك باعتبار أن القياسات قد جرت بنفس الجهاز وضمن نفس الشروط .
إذا كانت أطوال المسارات كلها تقريبا متساوية فستطيع أن نعتبر أن المصفوفة G هي الاحادية ونجد :

$$\hat{h} = h' - A^T (A A^T)^{-1} W$$

(7.2.17)

بعد حساب \hat{h} يمكننا حساب ارتفاعات العقد باتباع أي مسار نريد .
وباعتبار فروقات الارتفاعات المعدلة

٢ - التعديل بالقياسات بالواسطة :

لنحسب لكل عقدة ارتفاعا موقعا وذلك باتباع احد المسارات .

لكن هذه الارتفاعات $(H_I)_0$ ، $(H_{II})_0$ ، $(H_{III})_0$ ، $(H_{IV})_0$

ولكن H_I ، H_{II} ، H_{III} ، H_{IV} الارتفاعات النهائية لهذه العقدة

فيكونا أن نكتب

$$\begin{array}{l}
 H_I = (H_I)_o + x \\
 H_{II} = (H_{II})_o + y \\
 H_{III} = (H_{III})_o + z \\
 H_{IV} = (H_{IV})_o + t
 \end{array}
 \quad (7.2.18)$$

• حيث x, y, z, t تصحيحات مجهولة

يمكننا ان نكتب بالنسبة للمسار الاول :

$$(H_I)_o + x = H_A + h_1$$

والنسبة للمسار الثاني :

$$(H_{II})_o + y = H_A + h_2$$

وبالنسبة لبقية المسارات الواحد تلو الاخرى :

$$(H_{II})_o + y = (H_I)_o + x + h_3$$

$$(H_{II})_o + y = H_C + h_4$$

$$(H_{III})_o + z = H_C + h_5$$

$$(H_{III})_o + z = H_B + h_6$$

$$(H_I)_o + x = H_B + h_7$$

$$(H_{IV})_o + t = (H_I)_o + x + h_8$$

$$(H_{IV})_o + t = (H_{III})_o + z + h_9$$

$$(H_{IV})_o + t = H_A + h_{10}$$

فنجعل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned}
 x + . + . + . + . &= h_1 + H_A - (H_I)_0 \\
 . + y + . + . + . &= h_2 + H_A - (H_{II})_0 \\
 -x + y + . + . + . &= h_3 + (H_{II})_0 - (H_{II})_0 \\
 . + y + . + . + . &= h_4 + H_C - (H_{II})_0 \\
 . + . - z + . + . &= h_5 - H_C + (H_{II})_0 \\
 . + . - z + . + . &= h_6 - H_B + (H_{II})_0 \\
 x + . + . + . + . &= h_7 + H_B - (H_I)_0 \\
 -x + . + . + . + t &= h_8 + (H_{II})_0 - (H_{II})_0 \\
 . + . - z + t &= h_9 + (H_{II})_0 - (H_{II})_0 \\
 . + . + . + t &= h_{10} + H_A - (H_{II})_0
 \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

لندخل الرمز التالية :

$$B_{(10,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{10} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} H_A - (H_I)_o \\ H_A - (H_{II})_o \\ (H_I)_o - (H_{II})_o \\ H_C - (H_I)_o \\ (H_{III})_o - H_C \\ (H_{III})_o - H_B \\ H_B - (H_I)_o \\ (H_I)_o - (H_{II})_o \\ (H_{III})_o - (H_{II})_o \\ H_A - (H_{II})_o \end{pmatrix}$$

(7 . 2 . 20)

ونكتب المعادلات (7 . 2 . 19) على الشكل :

$$B\beta = h + L \quad (7 . 2 . 21)$$

ان الشعاع h يمكن قياسه بقياسات مركباته هي مركبات الشعاع h' التي نفرضها مستقلة وذات اوزان معروفة بالمصفوفة القطرية G ، أما الشعاع β فهو مجهول ولا يمكن قياسه . نحن هنا امام نموذج القياسات بالواسطة (6 . 3 . 3) وقد سبق ان وجدنا في الفصل السادس القانون الذي يعطينا المقدر $\hat{\beta}$ والمقدر \hat{h} وفق مبدأ المربعات الصغرى واللذين يحققان (7 . 2 . 21) . ان القانونين (6 . 10 . 8) و (6 . 10 . 6) مطبقين باعتبار ان الرمز الواردة اعلاه تعطينا :

$$\hat{\beta} = (B^T G B)^{-1} B^T G (h' + L) \quad (7.2.22)$$

$$\hat{h} = B \hat{\beta} - L \quad (7.2.23)$$

من هذين القانونين بحسب القدرتين فستنتج مركبات $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{t} \end{pmatrix} \quad (7.2.24)$$

وتكون الارتفاع المعدلة للعقد بموجب (7.2.18) بأدخال القدرات :

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= (H_I)_o + \hat{x} \\ \hat{H}_{II} &= (H_{II})_o + \hat{y} \\ \hat{H}_{III} &= (H_{III})_o + \hat{z} \\ \hat{H}_{IV} &= (H_{IV})_o + \hat{t} \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

نعتبر هنا أيضا أن الأوزان متناسبة عكسا مع أطوال المسارات أي وفق العلاقة (7.2.17). إذا كانت أطوال المسارات متساوية فنعد ما يمكننا اعتبار المسافة G هي المسافة الاحادية وتصبح العلاقة (7.2.22) :

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T (h' + L) \quad (7.2.26)$$

تطبيق : لنعتبر الشبكة المعطاة

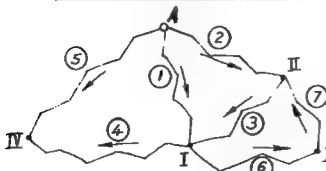
بالشكل (7.2.2) .

لفرض أن h'_1, h'_2, \dots, h'_7

فروق الارتفاعات المقاسة H_A و

ارتفاع النقطة A بحسب الارتفاعات

النهاية للعقد .



(شكل 7.2.2)

ملحق

النهايات العظمى والصغرى المرتبطة

(Maximum et minimum liés)

للمعتبر التابع

$$u = f(x, y, z) \quad (1)$$

حيث متحولات (x, y, z) غير مستقلة بل تخضع للعلاقة :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

لا يمكننا في هذه الحالة التمييز عن نهايات التابع u بأن نعدّم المشتقات الجزئية للتابع بالنسبة للمتحوّلات فالقيم التي سنجد هنا سوف لا تحقق بشكل عام المعادلة (2) .
لنفرض اننا نستطيع حل المعادلة (2) بالنسبة لاحد المتحوّلات z مثلاً فستنتج من (2)

$$z = \Phi(x, y) \quad (3)$$

وبادخال هذه العلاقة في التابع (1) نجد

$$u = f(x, y, z) = f(x, y, \Phi(x, y)) = F(x, y) \quad (4)$$

نلاحظ هنا اننا قد عبرنا عن u بدلالة متحولين x و y وهذان المتحولان مستقلين (والا لكنت هناك علاقة ثانية تربط المتحوّلات)
فيمكننا الان ان نطبق الطريقة المعروفة لحساب نهايات التابع u .

اذ نحصل على هذه النهايات بحل جطة المعادلتين :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad (5)$$

فالحصل على : $(x_0, y_0)_i$ التي تجعل التابع « اعظميا واصغريا ومن اجل كل $(x_0, y_0)_i$ نحصل من المعادلة (3) على قيمة z_0 المقابلة .

الا ان هذا الحل قد يكون صعبا اما بسبب المعادلة (2) التي قد لاتسمح بايجاد متحول بدلالة المتحولين الاخرين أو بسبب الصعوبة في حل جطة المعادلات (5) .

لهذا سنشرح طريقة ايجاد القيم العظمى والصغرى التابع لعدة متحولات غير مستقلة وهذه الطريقة هي طريقة مضارب لاجرانج (Lagrange) ، ولكن قبل التعرض لها لابد من ان نذكر بالملاحظة التالية :

لنعتبر التابع θ لـ n متحول مستقل

$$\boxed{\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (6)$$

نعلم انه في هذه الحالة نجد النهايات العظمى والصغرى لهذا التابع بأن نعدم كل مشتقاته الجزئية

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n} \quad (7)$$

وبحل جطة هذه المعادلات (7) نحصل على قيم المتحولات التي تجعل التابع اعظميا أو اصغريا .
لحسب الان التفاضل الكلي للتابع (6) :

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} dx_n \quad (8)$$

نلاحظ انه في نقاط النهايات نظرا لان المعادلات (7) تكون
 محققة فيمكننا ان نكتب في النهايات •

$$\boxed{d\theta = 0} \quad (9)$$

نستنتج هنا ان التفاضل الكلي لتابع لـ n متحول مستقل يساوى
 الصفر في نهايات التابع •

وبالعكس اذا كان التفاضل الكلي لتابع لـ n متحول مستقل معدوما
 فان كافة مشتقاته الجزئية تكون بالضرورة معدومة • بالحقبة اذا
 كانت $d\theta = 0$ فتصبح (8) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (10)$$

وبما ان المتحولات (x_1, x_2, \dots, x_n) مستقلة فان هذه العلاقة
 لا تتحقق الا اذا كان لدينا :

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0}$$

لفرض الان ان متحولات التابع θ غير مستقلة بل عليها ان تحقق r
 معادلة ($r < n$) :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

في هذه الحالة سنبين ان الشرط

$$\boxed{d\theta = 0} \quad (9)$$

في النهايات هو شرط لازم ، بالحقيقة يمكننا نظريا بحل المعادلات (11) ان نجد r متحولا بدلالة $(n-r)$ متحولا ونستطيع اذن ان نعوض الـ r متحول بدلالة الـ $(n-r)$ متحول في التابع (6) فنجد :

$$\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n)$$

ان المتحولات $x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n$ مستقلة . فحسب الخاصة اعلاه يجب ان يكون لدينا $d\theta = 0$ في نقاط النهايات .
بعد هذه الملاحظة للبين طريقة مضارب لاکراج لايجاد النهايات المرتبطة .

لنعتبر التابع

$$u = f(x, y, z) \quad (1)$$

حيث متحولاته (x, y, z) مرتبطة بالعلاقة :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

لقد بينا اعلاه ان التفاضل الكلي لتابع u يجب ان يعدم فـ في النهايات العظمى والصغرى فـ يجب ان يكون لدينا :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (12)$$

ولكن هذا لا يوجب ان تكون المشتقات الجزئية معدومة لان المتحولات غير مستقلة .

لحسب الان التفاضل الكلي لـ (2) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (13)$$

لنضرب المعادلة (13) بوسيط k مجهول ولنجعلها بعد ذلك للمعادلة (12) فنجد :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = 0$$

(14)

ان k ممكن ان تأخذ أية قيمة ، ولعمدتها بشكل تتحقق فيه العلاقة :

$$\frac{\partial f}{\partial z} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

وهنا يقتضي ان يكون $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$
تصبح عندئذ المعادلة (14) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy = 0 \quad (16)$$

بما انه لدينا علاقة بين (x, y, z) هي المعطاة بـ (2) فان لدينا في الطابع (1) فقط متحولين مستقلين ويستطيع حتما اعتبار أى متحولين من المتحولات (x, y, z) كمتحولين مستقلين ، فاذا اعتبرنا y, x متحولين مستقلين فان العلاقة (16) لا يمكن ان تتحقق الا اذا كان لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ان جملة المعادلات (15) ، (2) ، (17) والتي نعتمد كتابتها معا :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial z} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\
 \varphi(x, y, z) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

معطينا قيمة لـ k ونقم لـ (x, y, z) في النهايات •

ملاحظات :

١ - لقد افترضنا ان $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ فان لم يتحقق ذلك وكان $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ فستطيع ان تبدل في النقاش اعلاه z بـ y ونحصل على نفس المعادلات (١٨) •

٢ - نحصل على نفس المعادلات (١٨) فيها لو اخترنا المتحولين المستقلين (x, z) أو (y, z) •
لنعم الان هذه الطريقة •

لنعتبر التابع

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{19}$$

حيث ان متحولاته مرتبطة بالعلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

لنعين قيم k_1, k_2, \dots, k_r بشكل يصبح فيه لدينا

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

فلدينا r معادلة r مجهول وسنعتبر ان المعينة الاساسية مغايرة للصفر، عندئذ تصبح المعادلة (23)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} \right) dx_{r+1} \\ &+ \dots \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} \right) dx_n = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

بما انه لدينا r علاقة (20) تربط n متحول فلدينا $(n-r)$

متحول مستقل

لنعتبر ان المتحولات $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ في هذه الحالة لا تتحقق المعادلة (25) الا اذا كان لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

ولدينا هنا $(n-r)$ معادلة .

ان المعادلات (20) او (24) او (26) اعدادها بالتابع :

(r) ، $(n-r)$ أى $(n+r)$ معادلة فيحلها نجد

(k_1, k_2, \dots, k_r) والقيم (x_1, x_2, \dots, x_n) المعرفة للنهيات .

تسمى k_1, k_2, \dots, k_r مضارب لا كراج .

قاعدة لتشكيل المعادلات

لدينا التابع

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (19)$$

ونريد ايجاد نهيات العظمى والصغرى علما بأن متحولاته غير

مستقلة بل يجب ان تحقق r معادلة $r < n$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

لذلك بشكل التابع :

$$\begin{aligned} \Omega &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + k_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + k_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots\dots\dots \\ &\quad + k_r \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (27)$$

حيث k_1, k_2, \dots, k_r مضارب لا كراج .

شكل الان

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

فحصل على n معادلة وهي المعادلات (24) و (26) وهذا
لا يمكن ملاحظته بسهولة .

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{ثم بشكل :} \quad (29)$$

فحصل على r معادلة وهي نفس المعادلات (20) :

حالة خاصة :

لنعتبر الحالة الخاصة عندما يكون التابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
هو شكل تربيعي والتوابع $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ توابع خطية ، أى لنفرض
اننا نريد ايجاد قيم المتحولات x_1, x_2, \dots, x_n التي تجعل التابع :

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (30)$$

اعظميا واصغريا علما بأن المتحولات مرتبطة بالمعادلات الخطية :

$$\begin{array}{ll} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + & + b_{1n} x_n + \ell_1 = 0 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + & + b_{2n} x_n + \ell_2 = 0 \\ \vdots & \\ b_{r1} x_1 + b_{r2} x_2 + & + b_{rn} x_n + \ell_r = 0 \end{array} \quad (31)$$

حيث $(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{rn})$ اعداد حقيقية $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r$

ثوابت معطاة .

لنوصل الى ذلك بشكل التابع :

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2k_1 (b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \dots + b_{1n} x_n + \ell_1) \\ + 2k_2 (b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \dots + b_{2n} x_n + \ell_2) \\ \dots \dots \dots \\ + 2k_r (b_{r1} x_1 + b_{r2} x_2 + \dots + b_{rn} x_n + \ell_r) \end{aligned} \quad (32)$$

حيث اعتبرنا $(2k_1, 2k_2, \dots, 2k_r)$ مضارب لا كراج
ولايجاد النهايات بحسب اولا

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n} \quad (28)$$

لدينا

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + 2k_1b_{11} + 2k_2b_{21} + \dots + 2k_rb_{r1} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + 2k_1b_{12} + 2k_2b_{22} + \dots + 2k_rb_{r2} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = 2(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) + 2k_1b_{1n} + 2k_2b_{2n} + \dots + 2k_rb_{rn} = 0$$

يمكننا كتابة هذه المعادلات على الشكل التالي :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + (k_1, k_2, \dots, k_r) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} + (k_1, k_2, \dots, k_r) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} + (k_1, k_2, \dots, k_r) \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{pmatrix} = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} \quad \text{موضع :} \quad (33)$$

تكتب المعادلات السابقة على الشكل :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = X^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = X^T \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = X^T \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{r1} \\ b_{r2} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{pmatrix} = 0$$

حيث رمزنا بالدليل T لبيان منقول مصفوفة.

يمكننا الآن كتابة المعادلة السابقة على الشكل :

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \right) = X^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \quad (34)$$

لنضع :

$$A_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B_{(r,n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \quad (35)$$

نكتب المعادلة (34) بالشكل

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \right) = X^T A + K^T B = 0$$

لنستطيع دوما اعتبار مصفوفة الشكل الترتيبي متاظرة أى :
 $A = A^T$ فمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \right) = X^T A + K^T B = 0 \quad (36)$$

لنحسب الآن

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} = 0 \quad i = 1, \dots, r} \quad (29)$$

لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + l_1 = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial k_2} &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + l_2 = 0\end{aligned}\quad (37)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_r} = b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \dots + b_{rn}x_n + l_r = 0$$

وباستخدام الرموز (35) و (33) يمكننا ان نكتب هذه الجملة

$$\boxed{BX + L = 0} \quad \text{على الشكل :} \quad (38)$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad (39)$$

وكما ذكرنا هنا نحصل على نفس المعادلات الخطية التي تربط
المجاهيل أى المجموعة (31)

ان مجموعة المعادلات (36) و (38) تعطيان قيم التحولات
التي تجعل التابع f (30) اصغريا أو اعظما .

سنعطي فيما يلي طريقة سريعة للحصول على المعادلات (38)

و (36) • لنكتب التابع Ω (32) بادخال الرموز

التربيعية (33) و (35) و (39) :

$$\Omega = X^T A X + 2 K^T (BX + L) \quad (40)$$

لنأخذ التفاضل التام على ان التحولات هي X و K

$$d\Omega = dX^T A X + X^T A dX + 2 K^T B dX + 2 dK^T (BX + L)$$

(41)

الفهرس
=====

الفصل الاول

شكل الارض

صفحة	
٥	(1.1) — علم الجيوديزيا وقياساته
٦	(1.2) — مختلف الفرضيات لشكل الارض
٩	(1.3) — سطح المقارنة
١٢	(1.4) — الاحداثيات الجغرافية والاحداثيات الفلكية
١٦	(1.5) — الخطوط المعيزة على الاهليج الدوراني
١٧	(1.6) — المسألطان الاساسيان في الجيوديزيا
١٩	(1.7) — الكرة كسطح للمقارنة

الفصل الثاني

المعطيات الكروية

٢٤	(2.1) — الزاوية الكروية والمطث الكروي
٢٦	(2.2) — سطح قطعة الكرة
٢٧	(2.3) — الزيادة الكروية في المطث الكروي
٢٩	(2.4) — العلاقات الاساسية في المطث الكروي

الفصل الثالث

التمثيل المستوي

٢٤	(3.1) — تعريف التمثيل المستوي
٢٧	(3.2) — نظرية تيسو (Tissot) ومبادئ نظريات الارتسام

صفحة

- ٢٨ (3.3) — ارتسام الخرائط المسطحة المربعة
- ٤٤ (3.4) — ارتسام ميركاتور
- ٤٧ (3.5) — ارتسام ميركاتور العرضي أو ارتسام
غوس (Gauss)
- ٥٠ (3.6) — ارتسام لامبير (Lambert)
- ٥٤ (3.7) — الارتسامات العظومية
- ٥٦ (3.8) — الارتسام الستيريوغرافي القطبي
- ٦٣ (3.9) — الارتسام الستيريوغرافي المائل
- ٦٧ (3.10) — فائدة الارتسامات المطابقة

الفصل الرابع

الشبكات الجيوديزية

- ٦٦ (4.1) — تعريف الشبكات الجيوديزية وتقسيماتها
- ٧٢ (4.2) — الشروط المفروضة على الشبكات الجيوديزية
- ٧٣ (4.3) — عملية الاستطلاع أو التعرف على الطبيعة
- ٧٤ (4.4) — انشاء النقاط الجيوديزية والاشارات

الفصل الخامس

التسوية الهندسية الدقيقة

- ٧٧ (5.1) — تعريف التسوية الهندسية الدقيقة
- ٧٧ (5.2) — اجهزة التسوية الهندسية الدقيقة
- ٨٠ (5.3) — شبكات التسوية العامة
- ٨١ (5.4) — التفهيد العملي لمعطيات التسوية

الدقيقة لشبكة

- ٨٣ (5.5) — دقة التسوية الهندسية الدقيقة

الفصل السادس

تقدير المجاهيل وفق مبدأ المربعات الصغرى

صفحة

- (6.1) - تصنيف القياسات ٨٥
(6.2) - النموذج الرياضي للقياسات المباشرة ٨٦
(6.3) - النموذج الرياضي للقياسات بالواسطة ٨٨
(6.4) - النموذج الرياضي للقياسات الشرطية ٨٩
(6.5) - النموذج الرياضي للقياسات الشرطية ٩٠
مع مجاهيل
(6.6) - النموذج الرياضي الخطي العام ٩١
(6.7) - ادخال القياسات ومبدأ المربعات الصغرى ٩٢
(6.8) - حساب القدرات ٩٥
(6.9) - حالة القياسات المستقلة وذات نفس الدقة ١٠٢
(6.10) - حالات خاصة ١٠٢
(6.11) - حالة نماذج غير خطية ١٠٦

الفصل السابع

تطبيقات لمبدأ المربعات الصغرى

- (7.1) - تعديل التقاطع والتضمين ١١٣
(7.2) - تعديل شبكات التسوية ١٢٩

ملحق

- النهايات العظمى والصغرى المرتبطة ١٢٩

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

توزيع
دار القلم العربي بعلب

الطبعة الاولى
١٩٨٠

الرسوم وتصميم الغلاف : هايك طوباليان